Université de Strasbourg

TD2

Mébarek Alouani

Transcrit par
Pierre Guichard

L3 Semestre 6 2021

Rappels

Théorème d'Ostrogradski (divergence)

$$\phi_{\text{sortant}} = \oiint \vec{F}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint \operatorname{div}\left(\vec{F}(M)\right) \mathrm{d}\tau \tag{1}$$

Théorème de Stokes (rotationnel)

$$\mathcal{C} = \oint_C \vec{F}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint \vec{\operatorname{rot}}\left(\vec{F}(M)\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{2}$$

Exercice 1 : Distribution de Dirac

1. Rappeler la définition et les propriétés de la distribution de Dirac.
2. Calculer la transformée de Fourier de la distribution de Dirac.
3. Montrer que :

$$\Delta(1/r) = -4\pi\delta(r) \tag{3}$$

Exercice 2 : Propriétés algébriques générales et applications d'opérateurs

1. En coordonnées cartésiennes, montrer que si $\vec{U} = \vec{\text{grad}}(f)$ avec f une fonction *scalaire* quelconque, on a nécessairement $\vec{\text{rot}}(\vec{U}) = \vec{0}$.
2. En coordonnées cartésiennes, montrer que si $\vec{V} = \vec{\text{rot}}(\vec{W})$ avec $\vec{W}$ une fonction *vectorielle* quelconque, on a nécessairement $\text{div}(\vec{V}) = 0$.
3. *Application* : on considère un champ en coordonnées cylindriques de la forme : $\vec{F} = F_\theta(r, \theta, z)\hat{u}_\theta$. Que devient ce champ si sa divergence est nulle ? Que donne également la condition $\vec{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{0}$?
4. Montrer que :

$$\vec{\text{grad}}\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r'}\|} \equiv \vec{\nabla}\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r'}\|} = \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\|\vec{r} - \vec{r'}\|^3} \tag{4}$$

5. Vérifier les relations suivantes :
   (a) $\text{div}(f\vec{F}) = f\text{div}(\vec{F}) + \vec{F} \cdot \vec{\text{grad}}(f)$
   (b) $\vec{\text{rot}}(f\vec{F}) = f\vec{\text{rot}}\vec{F} + \vec{\text{grad}}f \times \vec{F}$
   (c) $\text{div}(\vec{V} \times \vec{W}) = \vec{W} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{V}) - \vec{V} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{W})$

Exercice 3 : Théorèmes analogues à ceux d'Ostrogradski et de Stokes

À l'aide des théorèmes d'Ostrogradski et de Stokes ainsi que des résultats de l'exercice précédent, montrer les théorèmes suivants :

1.
$$\oiint_S f(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint \vec{\mathrm{grad}}(f(M))\mathrm{d}\tau$$

2.
$$\oiint_S \mathrm{d}\vec{S}\times \vec{F}(M) = \iiint \vec{\mathrm{rot}}(\vec{F}(M))\mathrm{d}\tau$$

3.
$$\oint_C f(M)\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint \mathrm{d}\vec{S}\times \vec{\mathrm{grad}}(f(M))$$

Exercice 4 : Équation de Maxwell sous forme locale et intégrale

1. Donner l'équation de Maxwell-Gauss sous forme locale et intégrale. Commenter.
2. Donner l'équation de Maxwell-Ampère sous forme locale et intégrale. Commenter.
3. Donner l'équation de Maxwell-Faraday et celle du flux sous forme locale et intégrale. Commenter.

Exercice 5 : Équations de Poisson et potentiels

1. Montrer que le champ magnétique peut s'exprimer en fonction d'un potentiel vecteur $\vec{A}$.
2. De la même manière, montrer que le champ électrique peut s'écrire en fonction de $\vec{A}$ et d'un potentiel scalaire V.
3. En utilisant la jauge de Lorentz, montrer que les potentiels scalaires et vecteurs suivent les équations de Poisson :

$$\Box\vec{A} + \mu_0\vec{J} = \vec{0} \tag{5}$$

$$\Box V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \tag{6}$$

   où on rappel la jauge de Lorentz :

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

4. *Condensateur* : On considère un condensateur plan constitué de deux armatures parallèles de surface $\mathcal{S}$ porteuses d'une distribution surfacique de charges $+\sigma$ et $-\sigma$ et respectivement au potentiel V_1 et V_2. Ces armatures sont distantes l'une de l'autre d'une longueur a et le milieu entre elles est de permittivité ϵ_0. Dans le cas statique, calculer la valeur de la capacité définie par la relation $Q = CU$ où $U = V_2 - V_1$ étant la différence de tension entre les deux armatures et Q la charge électrique d'une armature.

Exercice 6 : Énergie électromagnétique

On rappelle que l'énergie électrostatique et l'énergie magnétostatique peuvent s'écrire :

$$W_{\text{elec}} = \iiint \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathrm{d}\tau \tag{7}$$

$$W_{\text{magn}} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} \mathrm{d}\tau \tag{8}$$

1. À partir du calcul de $\mathrm{div}(V\vec{E})$, montrer que l'expression de l'énergie électrostatique peut se mettre sous la forme :

$$W_{\text{elec}} = \iiint_\tau \frac{V\rho}{2} \mathrm{d}\tau \tag{9}$$

   dans le cas où le potentiel décroît au moins en $1/r$.
2. De même, à partir de l'expression $\mathrm{div}[\vec{A} \times \vec{B}]$, montrer que l'expression de l'énergie magnétostatique peut se mettre sous la forme :

$$W_{\text{magn}} = \iiint_\tau \frac{\vec{A} \cdot \vec{j}}{2} \mathrm{d}\tau \tag{10}$$

3. Que deviennent ces expressions dans le cas non-statique ?

Exercice 7 : Équations bilan

1. Montrer que les équations de Maxwell contiennent l'équation de conservation à la charge électrique.
2. On considère un ensemble de charges mobiles se déplaçant toutes à une vitesse uniforme v. On cherche à établir l'équation-bilan d'énergie électromagnétique pour un tel système. On définit le vecteur de Poynting $\vec{R}(M,t)$ par :

$$\vec{R}(M,t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(M,t) \times \vec{B}(M,t) \tag{11}$$

   (a) Montrer que la puissance volumique fournie par un champ électromagnétique aux charges mobiles peut s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\tau} = \vec{J} \cdot \vec{E} \tag{12}$$

   (b) Donner l'expression de l'énergie associée à un champ électromagnétique uniforme.

   (c) En calculant la divergence du vecteur de Poynting $\vec{R}(M,t)$, établir l'équation bilan d'énergie électromagnétique du système. Commenter.