Faculté de physique et ingénierie
Université de Strasbourg

Université de Strasbourg

TD4

Mébarek Alouani

Transcrit par
Pierre Guichard

L3 Semestre 6 2021

1 Exercice 1

Soit une sphère de centre O et de rayon R limitant un domaine D de polarisation uniforme P. Calculer le potentiel électrique pour $r < R$ et pour $r > R$. Déduire le champ électrique pour $r < R$ et $r > R$.

La polarisation est dirigé selon $\vec{u}_z$, et on sait que

$$\vec{P} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}\vec{p} = \vec{P}\mathrm{d}\tau$$

Alors, le potentiel dV :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{P}\frac{\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}\tau \\
&= \vec{P}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

On peut alors intégré cette dernière équation,

$$V = \iiint \vec{P}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\mathrm{d}\tau$$

Si la polarisation P ne dépend pas de l'espace (et est donc uniforme), on peut alors sortir le $\vec{P}$ de cette intégrale,

$$V = \vec{P}\iiint \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\mathrm{d}\tau$$

Qu'est-ce que l'on remarque ? le terme après la polarisation est en fait l'expression d'un champ électrique dit "auxiliaire" $\vec{E}_{\text{aux}}$, qui est équivalent à un champ électrique pour une densité de charge volumique $\rho = 1$,

$$\vec{E} = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho\mathrm{d}\tau\vec{r}}{r^3} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E}_{\text{aux}} = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}\tau\vec{r}}{r^3}$$

On peut ainsi utilisé le théorème de Gauss pour déterminé les deux potentiels (à l'intérieur $V_<$ et à l'extérieur $V_>$ de la sphère).

- Intérieur de la sphère,

$$\oiint \vec{E}\cdot\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

  Alors,

$$E4\pi r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$

Alors,

$$\boxed{\vec{E}_< = \frac{r}{3\epsilon_0}\vec{u}_r}$$

- Extérieur de la sphère,

$$E4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0}$$

Alors,

$$\boxed{\vec{E}_> = \frac{R^3}{3r^2\epsilon_0}\vec{u}_r}$$

Avec les champ axillaire précédemment calculé, on peut trouver les deux potentiel,

- Intérieur de la sphère,

$$\begin{aligned} V_< &= \frac{\vec{P}r}{3\epsilon_0}\vec{u}_r \\ &= \frac{Pr\cos\theta}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

- Extérieur de la sphère,

$$\begin{aligned} V_> &= \frac{\vec{P}R^3}{3\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r \\ &= \frac{PR^3\cos\theta}{3\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

Et désormais, pour trouver notre champ électrique $\vec{E}$, on utilise $\vec{E} = -\vec{\nabla}(V)$, et on sait que $\vec{u}_z = \cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta$,

- Intérieur de la sphère,

$$\begin{aligned} \vec{E}_< &= -\vec{\nabla}(V_<) \\ &= \frac{P}{3\epsilon_0}\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ &= -\frac{P}{3\epsilon_0}\vec{u}_z \end{aligned}$$

- Extérieur de la sphère,

$$\begin{aligned} \vec{E}_> &= -\vec{\nabla}(V_>) \\ &= \frac{PR^3}{3\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans ce cas, on remarque que cela ressemble au champ d'un dipôle.

La polarisation est maintenant donnée par $\vec{P} = \alpha\vec{r}$, où α est une constante. Déterminer les densités volumiques ρ_l et surfacique σ_l des charges liées et le champ électrique.

On sait que :

$$\boxed{\rho = -\vec{\nabla}\vec{P}} \qquad \boxed{\sigma = \vec{P}\cdot\vec{n}}$$

Et on rappelle la divergence en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)$$

Alors,

$$\rho = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\alpha r) = -3\alpha$$

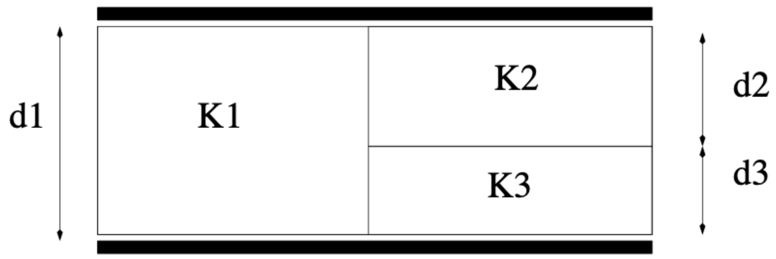
$$\sigma = \alpha\vec{r}\cdot\vec{n} = \alpha r$$

Cependant, attention, σ existe uniquement en $r = R$, alors

$$\sigma = \alpha R$$

Exercice 2

Soit un condensateur plan dont les armatures de surfaces S sont séparées par une distance d_1. On place entre les armatures de ce condensateur trois diélectriques d'épaisseurs d_1, d_2 et d_3 et de constantes diélectriques respectives K_1, K_2, K_3 (voir figure).



Montrer que la capacité de ce condensateur est donnée par :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{2}\left(\frac{K_1}{d_1} + \frac{K_2 K_3}{K_2 d_3 + K_3 d_2}\right)$$

On sait que la différence de potentiel $\Delta V = V_1 = V_2 = El$, alors :

$$E = \frac{-\vec{\nabla} V}{l}$$

Et on sait que pour le vide le champ $\vec{E}$ électrique entre les deux plaques d'un condensateur de densité surfacique de charge σ :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Alors, dans le cas d'un diélectrique, c'est :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 K} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

D'où on peut réécrire ΔV :

$$\Delta V = El = \frac{\sigma}{\epsilon_0 K} l$$

Et on sait que :

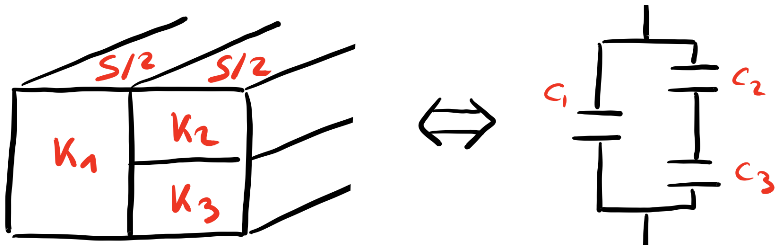
$$Q = C\Delta V = \sigma S$$

Alors,

$$C \frac{\sigma}{\epsilon_0 K} l = \sigma S$$

D'où :

$$\boxed{C = K \frac{\epsilon_0 S}{l}}$$



$$
\begin{aligned}
C_{\text{équivalent}} &= C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \\
&= \frac{\epsilon_0 S}{2}\left[\frac{K_1}{d_1} + \frac{\frac{K_2 K_3}{d_2 d_3}}{\frac{K_2}{d_2} + \frac{K_3}{d_3}}\right] \\
&= \frac{\epsilon_0 S}{2}\left[\frac{K_1}{d_1} + \frac{K_2 K_3}{K_2 d_3 + K_3 d_2}\right]
\end{aligned}
$$

Exercice 3

Une sphère métallique de rayon R_1 de charge Q est entourée par une calotte sphérique de rayon intérieur R_2 et extérieur R_3 et de permittivité ϵ.

(1) Déterminer le champ électrique d'un point M situé à distance r du centre de la sphère métallique. Distinguer les cas : $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$ et $r > R_3$.

Théorème de Gauss dans le vide :

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Théorème de Gauss dans le diélectrique :

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

- $r < R_1$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

A l'intérieur d'un conducteur le champ électrique est nul puisque le potentiel est constant.

- $R_1 < r < R_2$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

- $R_2 < r < R_3$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}\vec{u}_r$$

- $r > R_3$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

(2) Déterminer le potentiel électrique au centre de la sphère métallique.

On sait que le potentiel électrique V à l'infini est nul, c'est à dire que $V(\infty) = 0$, alors :

$$\int E = -\left(V(\infty) - V(0)\right) = V(0)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
V(0) &= \int_0^{+\infty} E_r \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{R_1} 0\mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r + \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}\mathrm{d}r + \int_{R_3}^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)\right] \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)\right] \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{\chi}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)\right]
\end{aligned}$$

où χ est la susceptibilité du milieu.

(3) En supposant que le diélectrique est linéaire, déterminer sa polarisation électrique et représenter le vecteur polarisation sur un schéma.

On sait que :

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$$

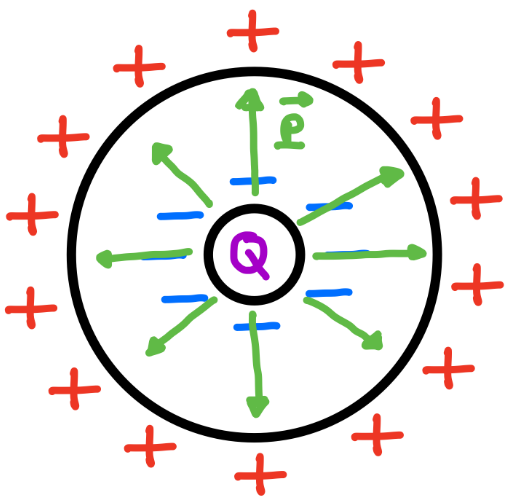
Et dans le vide $\epsilon_r = 1$, alors :

- $r \notin [R_2, R_3]$

$$\vec{P}_1 = \vec{0}$$

4 $r \in [R_2, R_3]$

$$\vec{P}_2 = \epsilon_0 \chi Q \frac{1}{4\pi\epsilon_r r^2}\vec{u}_r$$



(4) Montrer que la densité volumique de charges liées du diélectrique est nulle.

Ici $\vec{P}_2$ est uniquement selon $\vec{u}_r$, alors :

$$\rho = -\vec{\nabla}\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\epsilon_0\chi Q\frac{1}{4\pi\epsilon_r r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\epsilon_0\chi Q\frac{1}{4\pi\epsilon_r}\right) = 0$$

(5) Déterminer la densité surfacique de charges liées du diélectrique.

$$\sigma = \vec{P}\cdot\vec{n}$$

Ici il y a deux surfaces, alors :

$$\sigma_+ = \frac{Q\chi}{4\pi\epsilon_r R_3^2} \qquad \sigma_- = -\frac{Q\chi}{4\pi\epsilon_r R_2^2}$$

Exercice 4

Deux charges électrique q de même valeur mais de signes opposés, placées à une distance $2d$ l'une de l'autre forment un dipôle électrique. Un dipôle électrique est caractérisé par un moment dipolaire électrique $p = 2qd$, orienté de la charge négative vers la charge positive.

De nombreuses molécules possèdent un moment dipolaire électrique. Celui d'une molécule de vapeur d'eau (H_2O) est égal à 6.1×10^{-30} C.m.

(1) Montrer que le potentiel $V(r, \theta)$ en un point quelconque P loin du dipôle, est approximativement donné par :

$$V(r,\theta) \simeq \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

où $\hat{r} = \vec{r}/r$ est un vecteur unitaire et θ est l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{r}$, et que le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right)$$

où $\hat{\theta}$ est le vecteur unitaire polaire perpendiculaire à $\hat{r}$.

(2) Montrer que le champ électrique de la question 1 peut s'écrire

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3(\hat{r}\cdot\vec{p})\cdot\hat{r} - \vec{p}\right)$$

Noter que cette dernière expression est indépendante du système de coordonnées.

On part de

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right)$$

Et on sait que :

$$\hat{z} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ -\sin\theta\end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2p\cos\theta\hat{r} + p\sin\theta\hat{\theta}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2p\cos\theta\hat{r} + p\cos\theta\hat{r} - \vec{p}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3p\cos\theta\hat{r} - \vec{p}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right)
\end{aligned}$$

(3) Montrer que l'énergie électrostatique de ce dipôle, placé dans un champ électrique est donnée par $W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. Soit deux dipôles de moments dipolaires $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ situés à une distance r l'un de l'autre. Montrer que l'énergie d'interaction de ces deux dipôles est donnée par :

$$W_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3\left(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}\right)\left(\vec{p}_2 \cdot \hat{r}\right)\right]$$

On sait que l'énergie potentielle est la contribution de la charge positive et de la charge négative,

$$E_p = E_p(\text{négative}) + E_p(\text{positive})$$

Et on sait que :

$$E_p = qV$$

Alors, on peut réécrire :

$$E_p = q\left(V(\text{positive}) - V(\text{négative})\right)$$

Et on sait aussi que

$$\vec{E} = E\hat{x} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

C'est à dire que :

$$V = -\int E \mathrm{d}x = -Ex + \text{constante}$$

Alors,

$$E_p = -qE\left(x_p - x_n\right)$$

Et on sait que :

$$x_p - x_n = NP\cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Et ainsi,

$$E_p = -qENP\cos\theta = qE\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}_1\right]$$

Alors,

$$\begin{aligned} W_I &= -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})\right] \end{aligned}$$

(4) Trouver l'état d'équilibre de ces dipôles électriques, et en déduire l'état d'équilibre d'un ensemble de N dipôles, dont le centre de gravité de chacun d'entre eux est situé sur une ligne droite.

$$E_p = -\vec{p}_2 \vec{E}_1(A_2)$$

Alors,

$$E_p = \frac{-p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\right]$$

On cherche la position d'équilibre, c'est à dire on cherche à minimisé l'énergie potentielle E_p alors :

$$\left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

On trouve alors 4 cas :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \varphi_0 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = \pi \\ \varphi_0 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = \pi/2 \\ \varphi_0 = \pi/2 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = \pi/2 \\ \varphi_0 = -\pi/2 \end{cases} \tag{4}$$

Pour trouver l'équilibre stable, il faut regarder le signe de la dérivée seconde, ici seul la situation 1 est un équilibre stable.

(5) Expliquer qualitativement comment l'eau chauffe dans un four micro-ondes, sachant que cet appareil utilise un champ électrique oscillant. Noter que l'alignement de molécules d'eau est exothermique et que la brisure de cet alignement est endothermique.

Exercice 5

Pour un diélectrique linéaire la polarisation est proportionnelle au champ électrique total $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ (relation constitutive de la matière). Si le système est constitué d'atomes ou de molécules non polaires, le moment dipolaire induit est proportionnel au champ électrique $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, où α est la polarisabilité de l'atome ou de la molécule.
Montrer que la polarisabilité α est donnée par la formule de Clausius-Mossotti :

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N}\left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)$$

où ϵ_r est la constante diélectrique relative. Vérifier cette formule pour les gaz donnés dans le tableau.

Atome	$\alpha/(4\pi\epsilon_0) \times 10^{-30}$ m^3	ϵ_r
H	0.667	1.00025
He	0.205	1.000065
Ne	0.396	1.00013
Ar	1.64	1.000 52

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned}\vec{P} &= n\vec{p} \\ &= n\alpha\vec{E}_l \\ &= n\alpha\left[\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right]\end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\vec{P}\left[1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}\right] = n\alpha\vec{E}$$

On trouve alors :

$$\vec{P} = \frac{n\alpha}{1 - \dfrac{n\alpha}{3\epsilon_0}}\vec{E} = \epsilon_0\chi_e\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$$

Alors,

$$\frac{n\alpha}{1 - \dfrac{n\alpha}{3\epsilon_0}} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)$$

On trouve alors :

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N}\left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)$$

L'équation de Langevin permet de calculer la susceptibilité d'une substance polaire en fonction du moment dipolaire p. En effet, l'énergie d'un dipôle W dans un champ électrique E est $W = -\vec{p}\cdot\vec{E}$. Cette énergie varie par conséquent entre $-pE$ et $+pE$, et sa valeur dépend de l'orientation du moment dipolaire par rapport au champ électrique. En physique statistique, la probabilité pour qu'un atome ou une molécule a une énergie W est proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp(-W/kT)$. La moyenne de cette énergie est donnée par

$$\langle W\rangle = \frac{\int_{-pE}^{+pE} W\exp(-W/kT)\mathrm{d}W}{\int_{-pE}^{+pE}\exp(-W/kT)\mathrm{d}W}$$

où k est la constante de Boltzmann.

- Utiliser cette moyenne pour montrer que la polarisation d'une substance contenant N molécules par unité de volume est donnée par la formule de Langevin :

  $$P = Np\left(\coth\left(\frac{pE}{kT}\right) - \frac{kT}{pE}\right)$$

  Représenter graphiquement cette polarisation non linéaire en fonction de la température. Aide : la valeur moyenne du moment dipolaire est donnée par $\langle\vec{p}\rangle = \langle p\cos\theta\rangle\hat{E} = \langle\vec{p}\cdot\vec{E}\rangle\hat{E}/E$ ($\hat{E}$ est un vecteur unitaire suivant $\vec{E}$).

- Montrer que si $pE \ll kT$ (condition presque toujours vérifiée pour une température ambiante) que le système est linéaire, et déterminer la susceptibilité en fonction de N, p, T, et k.

- Calculer la susceptibilité de l'eau et la comparer à la valeur expérimentale $\chi_e = 79.1$. On donne $p = 6.1\times10^{-30}$ C.m. Calculer χ_e de la vapeur d'eau (valeur expérimentale $\chi_e = 0.00587$). On suppose que la valeur d'eau est un gaz parfait. Conclusion.

$$\begin{aligned}\int_{-pE}^{pE}\exp(-W/kT)\mathrm{d}W &= -\frac{1}{kT}\left[\exp(-W/kT)\right]_{-pE}^{pE}\\ &= -\frac{1}{kT}\left[\exp(-pE/kT) - \exp(pE/kT)\right]\\ &= \frac{2}{kT}\sinh(pE/kT)\end{aligned}$$

$$\int_{-pE}^{pE} W\exp(-W/kT)\mathrm{d}W = -pEkT2\cosh(pE/kT) + 2(kT)^2\sinh(pE/kT)$$

Alors,

$$\langle W \rangle = kT - pE \coth(pE/kT)$$

On peut réécrire notre polarisation :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= N\langle \vec{p} \rangle \\ &= -N\frac{\langle W \rangle \hat{E}}{\vec{E}} \\ &= Np\left[\coth(pE/kT) - kT/pE\right] \\ &= Np\left[\coth(X) - \frac{1}{X}\right]\end{aligned}$$

On fait le développement limité de $\coth(X)$,

$$\coth(X) \simeq \frac{1}{X} + \frac{X}{3}$$

Alors,

$$\vec{P} = Np\left(\frac{pE}{3kT}\right)$$

On connaît l'expression de P avec la susceptibilité χ :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

Alors,

$$\chi = \frac{Np^2}{3kT\epsilon_0}$$