Université de Strasbourg

TD5

Mébarek Alouani

Transcrit par

Pierre Guichard

L3 Semestre 6 2021

Exercice 1

Dans le cadre de la magnétostatique, la loi de Biot et Savart est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{j}(\vec{r'} \times [\vec{r}-\vec{r'}]}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\mathrm{d}^3r' \tag{1}$$

1. Montrer que la loi de Biot-Savart peut s'écrire sous le forme :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int_\tau \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\mathrm{d}^3r' \tag{2}$$

2. Montrer que la divergence du champ magnétique donné par la loi de Biot-Savart est nulle.

   On sait que :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = 0$$

3. Calculer le rotationnel de $\vec{B}$ en utilisant la loi de Biot-Savart et montrer qu'on obtient le théorème d'Ampère.

   La loi de Biot-Savart :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r})\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\mathrm{d}V'$$

   Et

$$\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)$$

   Et on sait que :

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \vec{\nabla}^2\cdot\vec{F}$$

   On prend alors le rotationnel de la loi de Biot-Savart,

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\left(\int \vec{J}(\vec{r'})\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)\mathrm{d}V'\right) - \vec{\nabla}^2\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\mathrm{d}V'$$

   Et on sait que

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right) = -\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)$$

   On peut alors intégré par partie le premier terme,

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\int\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)\mathrm{d}V' - \int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\mathrm{d}V'\right)$$

Le premier terme est un terme de surface et il s'annule si nous supposons $\vec{J}(\vec{r}') \to 0$ pour $|\vec{r}'| \to \infty$.
Le second terme s'annule via l'équation de continuité,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ce qui nous donne :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}V'$$

Et on sait que :

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

Nous avons alors :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Exercice 2

On peut montrer que le potentiel vecteur d'un dipôle magnétique est donné par :

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2} \tag{3}$$

où $\vec{m}$ est le moment magnétique du dipôle magnétique.

(1) Montrer que en coordonnées sphériques, le champ magnétique d'un dipôle magnétique est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}) \tag{4}$$

(2) et qu'on peut également l'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}(3(\hat{r}\cdot\vec{m})\hat{r} - \vec{m}) \tag{5}$$

Noter que cette dernière expression est indépendante du système de coordonnées.

Monter que :

(3) l'énergie de ce dipôle magnétique est donnée par

$$W = -\vec{m}\cdot\vec{B} \tag{6}$$

(4) et que l'énergie d'interaction de deux dipôles magnétiques de moments $\vec{m}_1$ et $\vec{m}_2$ est donnée par :

$$W_I = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}[\vec{m}_1\vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1\hat{r})(\vec{m}_2\hat{r})] \tag{7}$$

(5) Déterminer la configuration la plus stable de ces dipôles.

(6) Soit un ensemble d'un très grand nombre d'aiguilles aimantées disposées suivant une ligne droite et séparées par la même distance. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer l'orientation de ces aiguilles (on néglige le champ magnétique terrestre). Un argument similaire est parfois utilisé pour expliquer l'antiferromagnétisme. Noter cependant qu'un interprétation fondée sur cet argument classique est incorrecte car l'antiferromagnétisme est un phénomène quantique.

Exercice 3

Soit un boucle (B) dans un champ magnétique quelconque. Montrer que la force exercé sur cette boucle est donnée par :

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\vec{m}\dot{\vec{B}} \tag{8}$$

Faire la démonstration pour une boucle carrée de côté ϵ et montrer que ce résultat reste valable pour n'importe quelle forme de la boucle.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{F} &= i\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} \\
&= I\left[\mathrm{d}x\vec{i} \times \vec{B}(x, y_0, z_0) + \mathrm{d}y\vec{j} \times \vec{B}(x_0+\epsilon, y, z_0) - \mathrm{d}x\vec{i} \times \vec{B}(x, y_0+\epsilon, z_0) - \mathrm{d}y\vec{j} \times \vec{B}(x_0, y, z_0)\right] \\
&= I\mathrm{d}x\vec{i} \times [\vec{B}(x, y_0, z_0) - \vec{B}(x, y_0+\epsilon, z_0)] + I\mathrm{d}y\vec{j} \times [\vec{B}(x_0+\epsilon, y, z_0) - \vec{B}(x_0, y, z_0)] \\
&= -I\mathrm{d}x\epsilon\vec{i} \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + I\mathrm{d}y\epsilon\vec{j} \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial x}
\end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\epsilon\left[\mathrm{d}y\vec{j} \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial x} - \mathrm{d}x\vec{i} \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}\right]$$

On intègre,

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= I\epsilon\left[\mathrm{d}y\vec{j} \times \int_{x_0}^{x_0+\epsilon} \frac{\partial\vec{B}}{\partial x} - \mathrm{d}x\vec{i} \times \int_{y_0}^{y_0+\epsilon} \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}\right] \\
&\approx I\epsilon^2\left[\vec{j} \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial x} - \vec{i} \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}\right] \\
&= \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})
\end{aligned}$$

Exercice 4

(1) Soit une sphère uniformément aimantée de centre O et de rayon R. Calculer le potentiel vecteur pour $r < R$ et pour $r > R$. En déduire le champ magnétique pour $r < R$ et $r > R$.

(2) Calculer directement le champ magnétique au centre d'un cylindre de révolution aimanté uniformément selon son axe. Pour ce faire choisir un référentiel dont l'axe Oz est confondu avec l'axe du cylindre. Déterminer les limites de ce champ dans les cas où (a) la longueur du cylindre est très petite ou (b) très grande par rapport à son rayon.

$$\vec{J}_V = \vec{0} \qquad \vec{J}_S = \vec{M} \times \vec{n} = M\vec{u}_z \times \vec{u}_\rho = M\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_S(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{(r - r')^3} \mathrm{d}S$$

Dans notre situation, $\vec{r} = \vec{0}$, notre formule devient alors

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_S \times \vec{r}'}{r'^3} \mathrm{d}S$$

Avec $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$,

$$\vec{J} = \vec{M} \times \vec{n}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \vec{J} \times \vec{r}' &= (\vec{M} \times \vec{n}) \times \vec{r}' \\ &= M\left[(\vec{u}_z \cdot \vec{r}')\vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{r}')\vec{u}_z\right] \\ &= -M(\vec{n} \cdot \vec{r}')\vec{u}_z \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\vec{B}(0)\vec{u}_z &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iint -\frac{M(\vec{n}\cdot\vec{r}')\vec{u}_z}{r'^3}\mathrm{d}S\vec{u}_z \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{M(\vec{n}\cdot\vec{r}')}{r'^3}R\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{M(\vec{n}\cdot\vec{r}')}{r'^3}R\mathrm{d}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}M\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int R\mathrm{d}z\frac{r'\cos\theta}{r'^3} && R = r'\cos\theta \\
&= \frac{\mu_0}{2}M\int R\mathrm{d}z\frac{\cos\theta}{\frac{R^2}{\cos^2\theta}} && \tan\theta = \frac{z}{R} \to \mathrm{d}z = \frac{R}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0 M}{2}\int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}}\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \mu_0 M\sin(\theta_{\max}) \\
&= \mu_0 M\frac{1}{\sqrt{L^2+4R^2}} \\
&= \mu_0 M\frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{R}{L}\right)^2}}
\end{aligned}$$

Pour $L \gg R$,

$$\vec{B}(0) = \mu_0\vec{M}$$

Pour $L \ll R$,

$$\vec{B}(0) = \vec{0}$$