Université de Strasbourg

TD6

Mébarek Alouani

Transcrit par

Pierre Guichard

L3 Semestre 6 2021

Rappels et définitions

A ce jour, dans le cadre de ce cours, nous disposons de 3 méthodes pour calculer le champ magnétique,

Courants ampériens

Le champ est écrit $\vec{B}_a$ ou $\vec{B}^*$, cette méthode reviens à faire Biot-Savart, en utilisant :

$$\vec{J}_S = \vec{M} \wedge \vec{n} \qquad \vec{J}_V = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$$

Champ auxiliaire

Cette méthode fonctionne uniquement sur l'aimantation $\vec{M}$ est uniforme.

Masse magnétique

C'est une méthode pour passé de l'électrostatique à la magnétostatique.

Électrostatique

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Ce qui implique,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Alors,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int \frac{\sigma}{r}\mathrm{d}S + \int \frac{\rho}{r}\mathrm{d}\tau\right]$$

Avec,

$$\sigma = \vec{P}\cdot\vec{n} \qquad \rho = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

Ce qui nous donne le théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Magnétostatique

$$V^* = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Ce qui implique,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_m = \mu_0\rho_m$$

Alors,

$$V^* = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int \frac{\sigma_m}{r}\mathrm{d}S + \int \frac{\rho_m}{r}\mathrm{d}\tau\right]$$

Avec,

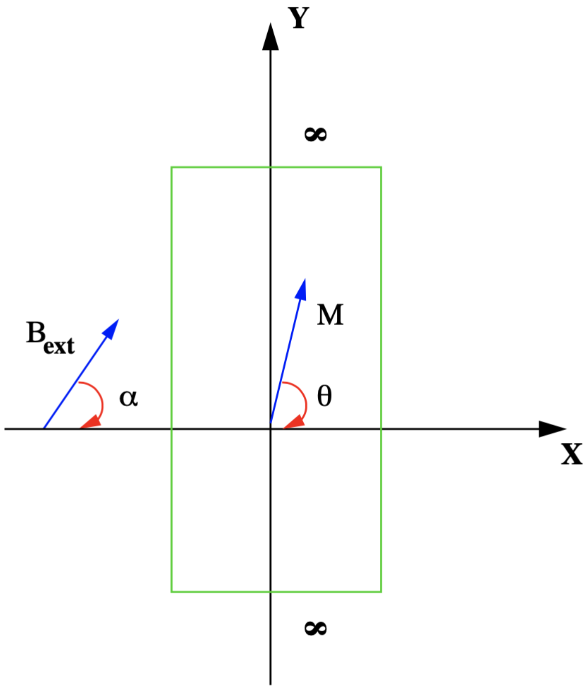
$$\sigma_m = \vec{M}\cdot\vec{n} \qquad \rho_m = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$$

On peut définir une relation équivalente au théorème de Gauss,

$$\oiint \vec{B}_m\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \rho_m V\mu_0$$

où V caractérise le volume.

Exercice 1 : Plaque paramagnétique



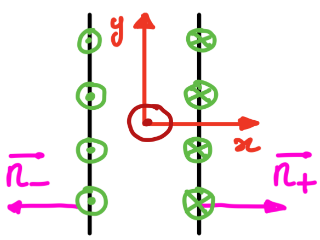
Une plaque paramagnétique de perméabilité μ, d'épaisseur d (suivant l'axe $(0,x)$) et de très grande longueur et largeur est plongée dans un champ magnétique $\vec{B}_{\text{ext}}$. Ce dernier fait un angle α avec l'axe $(0,x)$. La plaque acquiert une aimantation $\vec{M}$ uniforme dont la direction fait un angle θ avec l'axe $(0,x)$.

1. **Calcul à l'aide des courant ampériens** : déterminer le système de courants ampériens équivalent et en déduire le champ $\vec{B}_a$ crée par ces courants en tout points de l'axe $(0,y)$.

   On calcul $\vec{J}_S$ et $\vec{J}_V$,

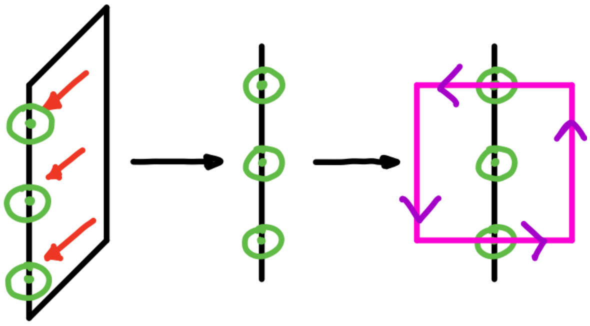
   $$\vec{J}_S = \vec{M} \wedge \vec{n} = \pm M \sin\theta \vec{u}_z \qquad\qquad \vec{J}_V = \vec{0}$$

   Il y a un $\pm$ puisque nous avons deux surfaces, donc deux normales.

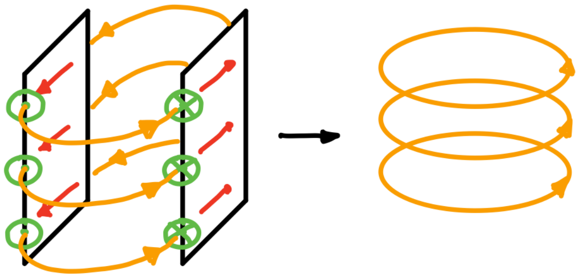
   

   Nous avons le théorème d'Ampère,

   $$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_a \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$



On définit ainsi un *contour d'Ampère* pour utilisé ce théorème, et on voit que



et on sait que

$$I = j_S \cdot S = j_S l \times 1$$

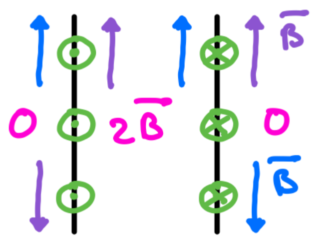
où S représente la surface "effective" où il y a le courant, on écrit alors "$\times 1$" pour avoir la bonne dimension sur une plaque. Et ainsi,

$$\begin{aligned} \int \vec{B}_a \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \mu_0 I = \mu_0 j_S l \\ \Leftrightarrow \qquad 2Bl &= \mu_0 j_S \end{aligned}$$

Et alors, le champ d'une plaque,

$$B = \frac{\mu_0 j_S}{2}$$

Si on ajoute la seconde plaque,



C'est à dire

$$\vec{B}_{\text{extérieur}} = \vec{0} \qquad\qquad \vec{B}_{\text{intérieur}} = 2\vec{B}$$

Alors,

$$\boxed{\vec{B}_a = \mu_0 j_S \vec{u}_y = \mu_0 M \sin\theta \vec{u}_y}$$

2. **Calcul à l'aide de la notion de masses magnétique** : déterminer le système de masses magnétiques équivalent et en déduire le champ $\vec{B}_m$ crée en tout point de l'axe $(0, y)$. On rappel que le champ électrique à l'intérieur d'un condensateur est donné par $E = \sigma/\epsilon_0$.

Électrostatique	**Magnétostatique**
$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} \qquad \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$	$\sigma_m = \vec{M} \cdot \vec{n} \qquad \rho_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$

Ici, M est uniforme, alors

$$\sigma_{+m} = M\cos\theta \qquad \sigma_{-m} = -M\cos\theta$$

On se rappel du champ électrique d'un condensateur, alors par analogie :

$$\boxed{\vec{B}_m = -\mu_0 \sigma \vec{u}_x = -\mu_0 M \cos\theta \vec{u}_x}$$

3. Expliciter ce que représentent les champs calculés précédemment.
4. Quel est le champ $\vec{B}$ total à l'intérieur de la plaque ?

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{B}_a = \mu \vec{H}_{\text{int}} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

5. En écrivant $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, en déduire une relation liant $\tan\alpha$ et $\tan\theta$. Donner l'expression de M^2 en fonction de B_{ext}, μ, μ_0 et α.

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\mu}{\mu_0}\tan\alpha}$$

$$\boxed{M^2 = B_0^2 \left[\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right]^2 \left[\cos^2\alpha + \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 \sin^2\alpha\right]}$$

6. Examiner les cas particuliers $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$.

- $\alpha = 0$, alors $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{B}_0$ est perpendiculaire à la plaque, alors $\theta = 0$ et ainsi $\vec{B}_a = \vec{0}$ et $\vec{B}_m = -\mu_0 M \vec{u}_x$
- $\alpha = \pi/2$, alors $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{B}_0$ est parallèle à la plaque, alors $\theta = \pi/2$ et ainsi $\vec{B}_a = \mu_0 M \vec{u}_y$ et $\vec{b}_m = \vec{0}$.

7. Expliciter les relations de continuité/discontinuité des composantes du champ H au voisinage d'une surface conductrice à partir de celles du champ magnétique.

$$(\vec{B}_{\text{ext}} - \vec{B}_{\text{int}}) \cdot \vec{n} = 0 \qquad\qquad (\vec{B}_{\text{ext}} - \vec{B}_{\text{int}}) \wedge \vec{n} = -\mu_0 \left(\vec{J} + \vec{J}_c\right)$$

où $\vec{J} = \vec{M} \wedge \vec{n}$ et $\vec{J}_c$ est le courant de conduction.
On trouve,

$$(\vec{H}_{\text{ext}} - \vec{H}_{\text{int}}) \cdot \vec{n} = \vec{M} \cdot \vec{n} = \sigma_m \qquad\qquad (\vec{H}_{\text{ext}} - \vec{H}_{\text{int}}) \wedge \vec{n} = -\vec{J}_c$$