Université de Strasbourg

TD7

Mébarek Alouani

Transcrit par
Pierre Guichard

L3 Semestre 6 2021

Exercice 1

Dans le vide les champs $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ et $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ d'une onde plane en un point $M(x, y, z)$ du milieu rapporté au référentiel orthonormé $Oxyz$ de base $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ ne dépendent que de la coordonnée z et du temps t.

1) Écrire huit relations aux dérivés partielles liant les composantes des champs $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ et $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$. En déduire que $E_z = B_z = 0$.

Équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

On peut écrire huit relations :

$$\begin{cases} \cancel{\dfrac{\partial E_x}{\partial x}} + \cancel{\dfrac{\partial E_y}{\partial y}} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0 & (1) \\ \cancel{\dfrac{\partial B_x}{\partial x}} + \cancel{\dfrac{\partial B_y}{\partial y}} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0 & (2) \\ \cancel{\dfrac{\partial E_z}{\partial y}} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} & (3) \\ \cancel{\dfrac{\partial E_z}{\partial x}} - \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = \dfrac{\partial B_y}{\partial t} & (4) \\ \cancel{\dfrac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\dfrac{\partial E_x}{\partial y}} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} & (5) \\ \cancel{\dfrac{\partial B_z}{\partial y}} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} & (6) \\ \cancel{\dfrac{\partial B_z}{\partial x}} - \dfrac{\partial B_x}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} & (7) \\ \cancel{\dfrac{\partial B_y}{\partial x}} - \cancel{\dfrac{\partial B_x}{\partial y}} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t} & (8) \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0 & (2) \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = \dfrac{\partial B_x}{\partial t} & (3) \\ -\dfrac{\partial E_x}{\partial z} = \dfrac{\partial B_y}{\partial t} & (4) \\ 0 = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} & (5) \\ -\dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} & (6) \\ -\dfrac{\partial B_x}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} & (7) \\ 0 = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t} & (8) \end{cases}$$

Si on prend la relation (1) et (8) :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Alors E_z est une constante, qu'on peut appelé E_0.
Si on prend la relation (2) et (5) :

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

Alors B_z est une constante, qu'on peut appelé B_0.
Puisque E_0 et B_0 sont des constante, on peut les posé à 0, d'où,

$$E_z = B_z = 0$$

2) On admet que les champs $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ et $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ de l'onde sont liés par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de ϵ_0 et μ_0 les quatres coefficients réel a, b, c d de cette matrice.

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} & (9) \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = \dfrac{\partial B_x}{\partial t} & (10) \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0 \epsilon_0}\dfrac{\partial B_y}{\partial z} & (11) \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = \dfrac{1}{\mu_0 \epsilon_0}\dfrac{\partial B_x}{\partial z} & (12) \end{cases}$$

De l'équation (9) et de l'identité matricielle :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = a\frac{\partial B_x}{\partial z} + b\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

On suppose la forme du champ $\vec{B}(B_x, 0, 0)$, alors :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\cancel{\frac{\partial B_y}{\partial t}} = a\frac{\partial B_x}{\partial z} + b\cancel{\frac{\partial B_y}{\partial z}}$$

On trouve ainsi :

$$a\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$$

Et on sait que la dérivée est non nulle, alors :

$$\boxed{a = 0}$$

De l'équation (10) et de l'identité matricielle :

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = c\frac{\partial B_x}{\partial z} + d\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

On suppose la forme du champ $\vec{B}(0, B_y, 0)$, alors :

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial t}} = c\cancel{\frac{\partial B_x}{\partial z}} + d\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

On trouve ainsi :

$$d\frac{\partial B_y}{\partial z} = 0$$

Et on sait que la dérivée est non nulle, alors :

$$\boxed{d = 0}$$

A l'aide de l'équation (9) et (11) :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} = b\dfrac{\partial B_y}{\partial z} \\ -\dfrac{1}{\mu_0\epsilon_0}\dfrac{\partial B_y}{\partial z} = b\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \end{cases}$$

En injectant l'une dans l'autre,

$$1 = b^2\mu_0\epsilon_0$$

Alors,

$$\boxed{b = \pm\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}}$$

Et d'une façon similaire,

$$\boxed{c = \pm\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}}$$

3) Calculer en fonction de ϵ_0 et μ_0, le rapport des modules des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

$$\begin{cases} E_x = bB_y \\ E_y = cB_x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} E_x^2 = b^2B_y^2 \\ E_y^2 = c^2B_x^2 \end{cases} \Longleftrightarrow E_x^2 + E_y^2 = b^2B_y^2 + c^2B_y^2$$

On trouve alors :

$$\boxed{\frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

4) Montrer que $b + c = 0$ et en déduire que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux.

Le produit scalaire donne :

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_x B_x + E_y B_y = (b + c) B_x B_y$$

Si on prend $B_x = 0$ ou $B_y = 0$, alors le produit scalaire serais nul. On sait que le produit scalaire ne dépend pas du système de coordonnées, alors :

$$\boxed{b + c = 0}$$

5) L'onde plane en M est représentée par le champ magnétique $\vec{B}(z,t) = B_0 e^{j(\omega t - kz}\hat{y}$, avec k réel positif ou négatif. Déterminer dans chacun des deux cas envisageables la vitesse de phase $\vec{v}$ de l'onde ainsi que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et le potentiel vecteur $\vec{A}$ de l'onde en notations réelles. On admettra que le potentiel scalaire V est constant.

On cherche k,

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = i\omega B_y \qquad\qquad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -ikB_y$$

Alors,

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

On trouve alors :

$$\boxed{k = \pm\omega\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Et on peut ainsi calculer la vitesse de phase :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\omega}{k} = \pm\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}$$

1 Exercice 2

Écrire les équations de Maxwell dans l'espace vide de sources et en déduire les équations de propagation du champ électromagnétique.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Alors, en faisant le rotationnel du rotationnel,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Et on sait que :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E}$$

Alors,

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Et de façon similaire pour $\vec{B}$,

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

Une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω, plane, polarisée rectilignement, se propage dans l'espace vide de sources. A l'origine O d'un système de coordonnées cartésiennes, son champ magnétique $\vec{B}(t)$ s'écrit, en notation complexe,

$$\vec{B}_1(t) = -\frac{j}{2} B_0 \hat{y} \exp(j\omega t)$$

et son vecteur d'onde à pour expression

$$\vec{k}_1 = k(-\cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{z})$$

avec $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

1) Préciser la relation de dispersion k.

$$k = \frac{\omega}{c}$$

2) Trouver, en notation complexe, l'expression $\vec{B}_1(t; M)$ du champ magnétique de l'onde en tout point $M(x; y; z)$.

$$\vec{B}_1(M, t) = -i\frac{B_0}{2}\exp\Big(i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})\Big)$$

Avec

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = -xk\cos\theta + zk\sin\theta$$

3) En déduire, en notation complexe, l'expression du champ électrique $\vec{E}_1(t; M)$ en M.

Pour une onde de la forme $A = A_0 \exp\Big(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\Big)$, les opérations $\vec{\nabla}$ et $\partial/\partial t$ sont équivalentes à :

$$\vec{\nabla} \longrightarrow -i\vec{k} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\omega$$

Alors,

$$\begin{aligned}
& & \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 &= \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \\
\Leftrightarrow & & -i\vec{k}_1 \times \vec{B}_1 &= \frac{i\omega}{c^2}\vec{E}_1 \\
\Leftrightarrow & & -\frac{\omega}{c}\vec{u}_1 \times \vec{B}_1 &= \frac{\omega}{c^2}\vec{E}_1 \\
\Leftrightarrow & & \vec{E}_1 &= c(\vec{B}_1 \times \vec{u}_1)
\end{aligned}$$

avec

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

4) Donner les expressions réelles de ces champs.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\vec{B}_1) &= \frac{B_0}{2}\sin\Big(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}\Big)\vec{u}_y \\
\mathrm{Re}(\vec{E}_1) &= \frac{cB_0}{2}(\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_z)\sin\Big(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}\Big)
\end{aligned}$$

5) A l'aide d'un schéma, préciser les orientations des champs $\vec{E}_1(t;M)$, $\vec{B}_1(t;M)$ et $\vec{k}_1$.
6) Déterminer la moyenne temporelle r_1 de la norme du vecteur de Poynting $\vec{R}_1$ de cette onde. Que représente-t-elle physiquement ?

   On connaît l'expression du vecteur de Poynting :

$$\begin{aligned}\vec{R}_1 &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_1 \times \vec{B}_1 \\ &= \frac{cB_0^2}{4\mu_0}\sin^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\vec{u}_1\end{aligned}$$

$$\langle\vec{R}_1\rangle = \frac{B_0^2}{8\mu_0}$$

7) Calculer numériquement r_1 pour $B_0 = 1$ T.

$$\langle\vec{R}_1\rangle = \frac{B_0^2}{8\mu_0} = 3.3\times 10^{-4}\ \text{W.m}^{-2} \equiv \text{ puissance moyenne/unité de surface}$$

On superpose à l'onde précédente une onde de même pulsation ! et dont le champ magnétique en O s'écrit en notation complexe

$$\vec{B}_2(t) = \frac{j}{2}B_0\hat{y}\exp(j\omega t)$$

et qui a pour vecteur d'onde

$$\vec{k}_2 = k(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{z})$$

8) Déterminer en notation complexe les champs électrique $\vec{E}(t;M)$ et magnétique $\vec{B}(t;M)$ résultant de cette superposition en tout point M.

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ &= \frac{B_0}{2}i\exp(i\omega t)\left(-\exp\left(-i\vec{k}_1\cdot\vec{r}\right) + \exp\left(-i\vec{k}_2\cdot\vec{r}\right)\right)\vec{u}_y \\ &= \frac{B_0}{2}i\exp(i\omega t)\left(\exp\left(-i\vec{k}_2\cdot\vec{r}\right) - \exp\left(-i\vec{k}_1\cdot\vec{r}\right)\right)\vec{u}_y\end{aligned}$$

   Et on sait que :

$$\vec{k}_2\cdot\vec{r} = kx\cos\theta\vec{u}_x + kz\sin\theta\vec{u}_z$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{B_0}{2} i \exp(i\omega t) \left(\exp(-ikx\cos\theta - ikz\sin\theta) - \exp(ikx\cos\theta - ikz\sin\theta)\right)\vec{u}_y \\
&= \frac{B_0}{2} i \exp(i\omega t - ikz\sin\theta) \left(\exp(-ikx\cos\theta) - \exp(ikx\cos\theta)\right)\vec{u}_y \\
&= \frac{B_0}{2} i \exp(i\omega t - ikz\sin\theta) \left(-2i\sin(ikx\cos\theta)\right)\vec{u}_y
\end{aligned}$$

Alors,

$$\vec{B} = B_0 \exp(i(\omega t - kz\sin\theta))\sin(kx\cos\theta)\vec{u}_y$$

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\
&= \frac{ic}{2} B_0 \exp(i\omega t) \left[-\exp\left(-i\vec{k}_1\cdot\vec{r}\right)(\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_z) + \exp\left(-i\vec{k}_2\cdot\vec{r}\right)(\sin\theta\vec{u}_x - \cos\theta\vec{u}_z)\right] \\
&= \frac{ic}{2} B_0 \exp(i\omega t)\exp(-ikz\sin\theta)\left[-\exp(ik\cos\theta x)(\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_z) + \exp(-ikx\cos\theta)(\sin\theta\vec{u}_x - \cos\theta\right. \\
&= \frac{ic}{2} B_0 \exp(i(\omega t - kz\sin\theta))\left[\sin\theta(-2i\sin(kx\cos\theta))\vec{u}_x - 2\cos\theta\cos(kx\cos\theta)\vec{u}_z\right] \\
&= cB_0 \exp(i(\omega t - kz\sin\theta))[\sin\theta\sin(kx\cos\theta)\vec{u}_x - i\cos\theta\cos(kx\cos\theta)\vec{u}_z]
\end{aligned}$$

Alors,

$$\vec{E} = cB_0 \exp(i(\omega t - kz\sin\theta))[\sin\theta\sin(kx\cos\theta)\vec{u}_x - i\cos\theta\cos(kx\cos\theta)\vec{u}_z]$$

9) Trouver la direction de propagation de cette onde résultante ainsi que la vitesse de propagation. Commenter le résultat.

Cette onde se propage selon $z'z$.

10) a) Déterminer en fonction des coordonnées la valeur moyenne temporelle I de la norme du vecteur de Poynting $\vec{R}$ de l'onde résultante.

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \\
&= \frac{cB_0^2}{\mu_0}\begin{pmatrix} -\cos\theta\cos(kx\cos\theta)\sin(kx\cos\theta)\cos\varphi\sin\varphi \\ 0 \\ \sin\theta\sin^2(kx\cos\theta)\cos^2\varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où $\varphi = \omega t - k\sin\theta z$.

Alors,

$$\begin{aligned}\langle R\rangle_z &= \frac{cB_0^2}{2\mu_0}\sin\theta\sin^2(kx\cos\theta)\\ &= \frac{cB_0^2}{2\mu_0}\sin\theta\frac{1}{2}(1-\cos(2kx\cos\theta))\\ &= \frac{cB_0^2}{2\mu_0}\sin\theta\frac{1}{2}(1-\cos(\Delta\varphi))\end{aligned}$$

On cherche $\Delta\varphi = 2\pi$, alors :

$$x = \frac{\pi}{k\cos\theta} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta} = \frac{\lambda}{2\cos\theta}$$

b) Décrire le phénomène d'interférence observé dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz. Quel est l'interfrange ?

11) Déterminer, par une méthode au choix, la force électromotrice induite que développerait cette onde à l'intérieur d'un circuit fait d'un conducteur filiforme, ayant la forme d'un carré de côtés de longueur a, situé dans le plan xOz, de centre $M_0(a = 2; 0; 0)$ et dont deux côtés sont parallèles à Oz.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \int_{-a/2}^{+a/2} \mathrm{d}z(E_z(t,0,z) - E_z(t,a,z)) + \int_0^a \mathrm{d}x(E_x(t,x,a/2) - E_x(t,x,-a/2))\\ &= -\frac{4icB_0}{k\sin\theta\cos\theta} = \sin^2\left(\frac{ka\cos\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{ka\sin\theta}{2}\right)\exp(i\omega t)\end{aligned}$$

Exercice 3

On considère un milieu ionisé. Celui-ci, initialement homogène, est globalement neutre et comporte, par unité de volume, N ions positifs et N électrons. Le milieu est suffisamment dilué pour qu'on puisse admettre que toutes ces charges sont sans interaction entre elles. La permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique de ce milieu ont les mêmes valeurs que dans le vide, soit ϵ_0 et μ_0 respectivement. On se propose d'étudier les conditions de propagation d'une onde électromagnétique dans un tel milieu. L'onde envisagée sera supposée monochromatique, de pulsation ω. Son champ électrique et son champ magnétique seront écrits en notation complexe, soit

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}(M)\exp(j\omega t) \qquad \vec{B}(M,t) = \vec{B}(M)\exp(j\omega t)$$

respectivement, $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$ étant des champs complexes. Cette onde imprime aux particules chargées un mouvement oscillatoire. De ce fait, le nombre de particules chargées dans un volume donné n'est plus constant. Le nombre N_- d'électrons par unité de volume s'écrit alors $N_- = N + n(M,t)$. Toutefois, les effets de ces mouvements sont faibles et n est une petite correction, $|n| \ll N$, dont la moyenne temporelle est nulle. Un tel effet existe aussi pour les ions positifs, mais peut être négligé par rapport à celui provenant des électrons, du fait que leur masse est beaucoup plus grande que celle d'un électron. Le nombre d'ions positifs par unité de volume sera donc encore pris égal à N.

1. Évaluer la densité volumique de charge $\rho(M,t)$. La charge d'un électron sera notée $-e$.

$$\rho = eN_+ - eN_- = -ne$$

2. La vitesse d'un électron situé au voisinage d'un point M sera écrite sous forme complexe comme

$$\vec{v}(M,t) = \vec{V}(M)\exp(j\omega t)$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, et en négligeant les forces magnétiques, trouver la relation entre cette vitesse et le champ électrique oscillant. On notera m la masse d'un électron.

On applique le RFD :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E}$$

C'est à dire,

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}$$

Alors,

$$\boxed{\vec{v} = -\frac{e}{im\omega}\vec{E}}$$

3. En déduire l'expression complexe

$$\vec{j}(M,t) = \vec{J}(M)\exp(j\omega t)$$

du vecteur densité volumique de courant résultant de ces mouvements. On tiendra compte uniquement du mouvement des électrons et on admettra que le produit $n\vec{v}$ peut être négligé dans cette expression.

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

où n est la densité, q la charge et $\vec{v}$ la vitesse. Alors,

$$\boxed{\vec{j} = -Ne\vec{v} = \frac{Ne^2}{im\omega}\vec{E}}$$

4. Connaissant $\rho(M,t)$ et $\vec{J}(M,t)$, trouver à partir des équations de Maxwell, les relations que doivent vérifier $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$.

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\dfrac{ne}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -i\omega\vec{B} \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0[\vec{j} + i\omega\epsilon_0\vec{E}] \end{cases}$$

5. Montrer que $\exp(j\omega t)\vec{\nabla}\cdot(N\_\vec{V}) = -j\omega n$.

Conservation de la charge,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Alors,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot[-Ne\vec{v}] + i\omega(-ne) &= 0 \\ \vec{\nabla}\cdot[N\vec{v}] &= -i\omega n \end{aligned}$$

Alors,

$$\boxed{\exp(i\omega t)\vec{\nabla}\cdot(N\vec{V}) = -i\omega n}$$

6. En remplaçant n et $\vec{v}$, et tenant compte des approximations préconisées, transformer les équations de Maxwell établies précédemment pour montrer que en ayant posé $\epsilon = 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^2}$

   a) $\vec{\nabla} \times \vec{B}(M) = j\omega\mu_0\epsilon_0\epsilon\vec{E}(M)$.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \\ &= \mu_0 \left(\frac{Ne^2}{im\omega}\vec{E} + i\omega\epsilon_0\vec{E}\right) \\ &= \mu_0 i \left(-\frac{Ne^2}{m\omega} + \omega\epsilon_0\right)\vec{E} \\ &= i\omega\mu_0\epsilon_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^2}\right)\vec{E} \\ &= i\omega\mu_0\epsilon_0\epsilon\vec{E}\end{aligned}$$

   b) $\vec{\nabla} \cdot (\epsilon\epsilon_0\vec{E}(M)) = 0$.

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

   Alors,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \left(i\omega\mu_0\epsilon_0\epsilon\vec{E}\right) &= 0 \\ \text{constante}\vec{\nabla}(\epsilon\vec{E}) &= 0\end{aligned}$$

   Alors,

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon\vec{E}(M)) = 0$$

   c) $\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = -j\omega\vec{B}(M)$.

   Identique que la précédente expression des équations de Maxwell.

   d) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(M) = 0$.

   Identique que la précédente expression des équations de Maxwell.

7. En déduire les équations de propagation

$$\Delta\vec{E}(M) + \epsilon\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}(M) = \vec{0} \qquad \Delta\vec{B}(M) + \epsilon\frac{\omega^2}{c^2}\vec{B}(M) = \vec{0}$$

   Avec $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

Alors,

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \vec{\nabla} \times (-i\omega \vec{B}) \\ &= -i\omega \vec{\nabla} \times \vec{B} \\ &= -i\omega i\omega \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \vec{E} \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E} \end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E} = 0$$

Et d'une façon similaire, pour $\vec{B}$ on trouve,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{B} = 0$$

8. On envisage une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}$.
   a) Trouver l'expression de k^2.

      On envisage une onde plane, alors

$$\vec{E} = \exp\left(-i\vec{k} \cdot \vec{r}\right)$$

      Alors,

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E} = \vec{\nabla}^2 \vec{E} \qquad\qquad = -k^2 \vec{E}$$

      Alors,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon$$

      Ce qui s'écrit

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}$$

b) En déduire que la propagation des ondes dans le milieu ionisé n'est possible que si la pulsation ω est supérieure à une valeur limite ω_p, appelée fréquence plasma.

La propagation est possible que si $k^2 > 0$, alors

$$\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon > 0$$

$$1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^2} > 0$$

$$\omega^2 > \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

$$\omega > \omega_p > \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$$

c) Évaluer numériquement ω_p en prenant $N = 1.8 \times 10^{11}$ m^{-3}, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 9 \times 10^{-31}$ kg. Quelle est la longueur d'onde correspondante ? Pour quel domaine de longueurs d'ondes la propagation se fait-elle sans atténuation ?

On trouve $\omega_p = 2.4 \times 10^7$ rd.s$^-1$, alors

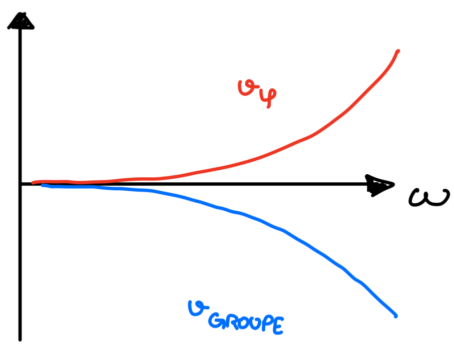
$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 75 \text{ m}$$

9. a) Pour un paquet d'ondes de pulsation moyenne $\omega > \omega_p$ pouvant se propager dans le milieu ionisé, quelles en sont la vitesse de phase V_ϕ et la vitesse de groupe V_g ?

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$v_{\text{groupe}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = c\sqrt{\epsilon} = c\sqrt{1-u^2}$$

b) Donner l'allure des variations de ces vitesses en fonction de $u = \omega_p/\omega \leq 1$.



10. On étudie maintenant la réflexion et la transmission d'une onde électromagnétique à l'interface entre l'air (non ionisé) et un milieu ionisé. Cet interface sera modélisé par le plan xOy, le passage de l'air au milieu ionisé s'effectuant dans le sens de l'axe Oz. Compte-tenu des équations établies au (6), le milieu ionisé est assimilable à un diélectrique de permittivité relative ϵ. D'autre part, du point de vue électromagnétique, l'air est équivalent au vide (mêmes constantes ϵ_0 et μ_0). Les conditions de passage du champ électromagnétique à l'interface de deux diélectriques seront donc applicables ici. Rappeler ces conditions, sans démonstration.
11. On considère la réflexion et la transmission d'une onde plane, monochromatique, polarisée rectilignement, se propageant depuis l'air suivant l'axe Oz. Dans l'air, le champ électrique résultant sera écrit sous la forme

$$\vec{E}_1(M,t) = E_0 \exp(j\omega t)[\exp(-jk_0 z) + r\exp(jk_0 z)]\vec{u}_y$$

r étant le coefficient de réflexion en amplitude de l'interface. Le champ électrique dans le milieu ionisé prend la forme

$$\vec{E}_2(M,t) = E_0 \tau \exp(j\omega t)\exp(-jkz)\vec{u}_y$$

τ étant le coefficient de transmission de l'interface.

a) Donner l'expression de k_0.

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

b) Trouver l'expression des champs magnétiques dans l'air, $\vec{B}_1(M,t)$ et dans le milieu ionisé $\vec{B}_2(M,t)$, respectivement.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\vec{B}$$

Alors,

$$\vec{B}_1 = -\frac{E_0 k_0}{\omega}\exp(i\omega t)(\exp(-ik_0 z) - r\exp(ik_0 z))\vec{u}_x$$

On sait aussi que $n = \sqrt{\epsilon}$, alors

$$\begin{aligned}\vec{B}_2 &= -\frac{E_0 k\tau}{\omega}\exp(-ik_0 z)\exp(i\omega t)\vec{u}_x \\ &= -\frac{E_0 n\tau}{c}\exp(-ikz)\exp(i\omega t)\vec{u}_x\end{aligned}$$

12. En appliquant les relations de passage pour $z = 0$, trouver les expressions de r et τ en fonction de $u = \omega_p/\omega$.

En posant $\vec{E}_1(z=0,t) = \vec{E}_2(z=0,t)$, alors

$$1 + r = \tau$$

En posant $\vec{B}_1(z=0,t) = \vec{B}_2(z=0,t)$, alors

$$1 - r = n\tau$$

On trouve alors,

$$\tau = \frac{2}{1+n} \qquad\qquad r = \frac{1-n}{1+n}$$

13. Pour $u \leq 1$, montrer que le facteur de réflexion en énergie de l'interface a pour expression

$$R = \frac{u^4}{(1+\sqrt{1-u^2})^4}$$

$$\begin{aligned}
R = r^2 &= \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \\
&= \left[\left(\frac{1-n}{1+n}\right)\left(\frac{1+n}{1+n}\right)\right]^2 \\
&= \left(\frac{1-n^2}{(1+n)^2}\right)^2 \\
&= \frac{u^4}{(1+\sqrt{1-u^2})^4}
\end{aligned}$$

14. a) Calculer numériquement R pour : $u = 0.6$, $u = 0.8$ et $u = \sqrt{80/81}$.

$$R(0.6) = 1.2 \times 10^{-2}$$
$$R(0.8) = 6.25 \times 10^{-2}$$
$$R(\sqrt{80/81}) = 0.64$$

b) En déduire que l'onde réfléchie ne produit un effet sensible que pour des valeurs de u très proches de 1.

Plus u tend vers 1, plus l'effet est grand.

15. Il existe dans la haute atmosphère terrestre une couche ionisée comportant un nombre d'électrons par unité de volume égal à $N = 1.8 \times 10^{11}$ m^{-3}. Sur terre, un émetteur envoie verticalement une onde électromagnétique dont la longueur d'onde peut être augmentée à partir d'une valeur minimum égale à 40 m.

a) A partir de quelle longueur d'onde reçoit-on au sol un écho très important dû à cette couche ionisée ?

Quand λ est proche de $\lambda_p \approx 75$ m.

b) Calculer numériquement l'altitude de cette couche sachant que l'écho est reçu 6×10^{-4} seconde après l'émission du signal.

$$h = \frac{c\delta_+}{2} = 90 \text{ km}$$