Faculté
de physique et ingénierie
Université de Strasbourg

Université de Strasbourg

TD4 - Formalisme x et p

Jean-Pascal Lavoine

Transcrit par
Pierre Guichard

L3 Semestre 5 2020

Exercice 1.

1. **Un opérateur linéaire $\hat{O}$ sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est défini par son action sur les éléments de $\mathscr{H}$:**

$$\hat{O}\psi = \psi'$$

où ψ et ψ' sont deux éléments de $\mathscr{H}$. On rappelle que l'opérateur adjoint $\hat{O}^\dagger$ de $\hat{O}$ est défini par la relation

$$\forall \varphi, \chi \in \mathscr{H}, \quad \left\langle \hat{O}^\dagger \varphi \middle| \chi \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| \hat{O}\chi \right\rangle$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne un produit scalaire hermitien sur $\mathscr{H}$.
Dans la notation de Dirac, le vecteur ψ de $\mathscr{H}$ est noté $|\psi\rangle$ et la transformation due à $\hat{O}$ se met sous la forme

$$\hat{O}\,|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$

où $|\psi\rangle$ et $|\psi'\rangle$ sont les deux vecteurs ("kets") de $\mathscr{H}$, leur produit scalaire étant toujours noté $\langle \psi | \psi' \rangle$.

(a) **Montrer qu'en notation de Dirac, pour un opérateur quelconque $\hat{O}$ de $\mathscr{H}$, on a la relation**

$$\forall \psi, \psi', \quad \langle \psi |\, \hat{O}\, | \psi' \rangle = \langle \psi' |\, \hat{O}^\dagger\, | \psi \rangle^\star$$

$$\left\langle \hat{O}^\dagger \psi \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle \psi \middle| \hat{O}\varphi \right\rangle$$

Mais en notation de Dirac,

$$\left| \hat{O}\varphi \right\rangle \longrightarrow \hat{O}\,|\varphi\rangle$$

Alors on peut réécrire ce qu'on a écrit précédemment

$$\left\langle \varphi \middle| \hat{O}^\dagger \psi \right\rangle^\star = \left\langle \psi \middle| \hat{O}\varphi \right\rangle$$

Et en écrivant ça dans la bonne notation,

$$\boxed{\langle \varphi |\, \hat{O}^\dagger\, | \psi \rangle^\star = \langle \psi |\, \hat{O}\, | \varphi \rangle}$$

(b) **Montrer que dans cette notation, le "bra" associée à $\hat{O}|\psi\rangle$ est $\langle\psi|\hat{O}^\dagger$ où $\langle\psi|$ est un élément de $\mathscr{H}^\star$, le dual de $\mathscr{H}$. Le bra $\langle\psi|$ associe à tout $|\psi\rangle$ de $\mathscr{H}$ le produit scalaire $\langle\psi|\varphi\rangle$.**

On peut définir $\langle\xi| = \left\langle\hat{O}\psi\right|$, alors

$$\langle\psi|\hat{O}^\dagger|\varphi\rangle = \left\langle\hat{O}\psi\middle|\varphi\right\rangle$$

Et alors,

$$\boxed{\langle\xi| = \left\langle\hat{O}\psi\right| = \langle\psi|\hat{O}^\dagger}$$

$$\boxed{|\xi\rangle = \left|\hat{O}\psi\right\rangle = \hat{O}|\psi\rangle}$$

2. **Montrer que si deux observables $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent, et si $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont deux vecteurs propres de $\hat{A}$ de valeurs propres différentes, alors $\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle$ est nul. En déduire que si deux observables $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent, on peut construire une base orthonormée de l'espace des états constituées par des vecteurs propres communs à $\hat{A}$ et $\hat{B}$.**

On peut posé

$$\hat{A}|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle \qquad \hat{A}|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle$$

De façon quelconque,

$$\hat{A}|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle \Rightarrow \langle\psi_1|\hat{A}^\dagger = \langle\psi_1|a_1^\star$$

Mais ici $\hat{A}$ est hermitique, alors $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ et d'où $a_1 = a_1^\star$.

$$\langle\psi_1|\hat{A} = \langle\psi_1|a_1$$

si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent, ça veux dire que leur commutateur $[\hat{A},\hat{B}] = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
0 = \langle\psi_1|[\hat{A},\hat{B}]|\psi_2\rangle &= \langle\psi_1|\hat{A}\hat{B}|\psi_2\rangle - \langle\psi_1|\hat{B}\hat{A}|\psi_2\rangle \\
&= a_1\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle - a_2\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle \\
&= (a_1 - a_2)\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle
\end{aligned}$$

On sait que $a_1 \neq a_2$, alors

$$\boxed{\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle = 0}$$

- Supposons que les valeurs propres a_n de $\hat{A}$ sont non dégénéré,

$$\hat{A}\left|\psi_n\right\rangle = a_n \left|\psi_n\right\rangle$$

Alors on peut faire la représentation matricielle de $\hat{A}$:

$$\begin{pmatrix} \langle\psi_1|\hat{A}|\psi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_1|\hat{A}|\psi_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\psi_n|\hat{A}|\psi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_n|\hat{A}|\psi_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle de $\hat{B}$:

$$\begin{pmatrix} \langle\psi_1|\hat{B}|\psi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_1|\hat{B}|\psi_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\psi_n|\hat{B}|\psi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_n|\hat{B}|\psi_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\psi_1|\hat{B}|\psi_1\rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \langle\psi_n|\hat{B}|\psi_n\rangle \end{pmatrix}$$

On sait que excepté sur la diagonale où on n'a pas d'informations, $\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle = 0$, d'où le fait que $\hat{B}$ est une matrice diagonale.

- Supposons que les valeurs propres a_n de $\hat{A}$ sont dégénéré,

$$\hat{A}\left|\psi_n^i\right\rangle = a_n \left|\psi_n^i\right\rangle \qquad i = 1, .., g_n$$

où g_n caractérise le degré de dégénérescence.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & a_1 & & & & \\ & & & a_2 & & & \\ & & & & a_2 & & \\ & & & & & a_n & \\ & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Et alors, dans les sous espaces de dégénérescence de même valeur propre a_n, la représentions de la matrice auras des coefficients qui peuvent être non-nuls :

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

On voit que la matrice de représentation de $\hat{A}$ vas encore être diagonale, et cette fois $\hat{B}$ vas être diagonale par bloc

Il existe une base propre commune à $\hat{A}$ et $\hat{B}$, c'est à dire une base qui diagonalise à la fois $\hat{A}$ et $\hat{B}$:

$$\left|\varphi_1^i\right\rangle = \sum_{i=1}^{g_1} \alpha_i \left|\psi_1^i\right\rangle$$

tel que $\hat{B}\left|\varphi_1^i\right\rangle = \beta_1^i \left|\varphi_1^i\right\rangle$

$$\hat{A}\left|\varphi_1^i\right\rangle = \sum_{i=1}^{g_1} \alpha_i \hat{A}\left|\varphi_1^i\right\rangle = a_1 \sum_{i=1}^{g_1} \alpha_i \left|\varphi_1^i\right\rangle = a_1 \left|\varphi_1^i\right\rangle$$

3. Soient $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ et $\hat{H}$ trois opérateurs hermitiques. On suppose que $[\hat{A}_1, \hat{H}] = 0$ et $[\hat{A}_2, \hat{H}] = 0$.
Montrer que si $[\hat{A}_1, \hat{A}_2] \neq 0$, alors $\hat{H}$ a au moins une valeur propre dégénérée.

Si on suppose que les valeurs propres de $\hat{H}$ ne sont pas dégénérée, on a que $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont diagonalisable dans la base de vecteur propre de $\hat{H}$, donc en particulier $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont diagonalisable dans la même base, donc commutent, ce qui est absurde par hypothèse, alors $\hat{H}$ à au moins une valeur propre dégénérée.

4. Soit un système physique dont l'espace d'états est de dimension 4. Soient deux opérateurs agissant dans cet espace et dont les représentations matricielles sont :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & ib & 0 \\ 0 & -ib & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où a et b sont des constantes réelles.

(a) $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont-ils hermitiques ? Commutent-ils ?

On sait que on dit qu'un opérateur est hermitique quand $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger} = \hat{A}^{T\star}$

Immédiatement on obtient que $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont hermitiques.

$\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent.

(b) Déterminer les valeurs propres de $\hat{A}$.

Nous avons deux valeurs propres a et $-a$ les deux dégénéré deux fois : il y a deux sous-espaces de dégénérescence de dimension 2

(c) Déterminer les valeurs propres et kets propres de $\hat{B}$.

- sous espace associé à $-a$:

$$\hat{B}\,|e_2\rangle = -ib\,|e_3\rangle$$
$$\hat{B}\,|e_3\rangle = ib\,|e_2\rangle$$

Ce qui nous permet d'avoir la représentation de $\hat{B}$ dans le sous espace associé à $-a$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & ib & 0 \\ 0 & -ib & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_{-a} \equiv \begin{pmatrix} 0 & ib \\ -ib & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_{-a}\,|\psi_n\rangle = \lambda_n\,|\psi_n\rangle$$

$$\left(\hat{B}_{-a} - \lambda_n \mathbb{I}\right)|\psi_n\rangle = 0$$

Alors,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & ib \\ -ib & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - b^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm b}$$

Pour trouver les vecteurs propres :

- Vecteur propre associé à la valeur propre b :

$$\begin{pmatrix} 0 & ib \\ -ib & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow iby = bx \Rightarrow x = iy$$

On souhaite normé nos vecteurs, alors :

$$\begin{pmatrix} -iy & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On trouve alors un vecteur propre :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- Vecteur propre associé à la valeur propre $-b$:

$$\begin{pmatrix} 0 & ib \\ -ib & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow iby = -bx \Rightarrow x = -iy$$

On souhaite normé nos vecteurs, alors :

$$\begin{pmatrix} iy & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} = 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On trouve alors un vecteur propre :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Alors on obtient les deux vecteurs propres associés a la valeur propre b et $-b$:

$$|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- sous espace associé à a :

$$\hat{B}\,|e_1\rangle = b\,|e_4\rangle$$
$$\hat{B}\,|e_4\rangle = b\,|e_1\rangle$$

Ce qui nous permet d'avoir le représentation de $\hat{B}$ dans le sous espace associé à a :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \boxed{a} & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & \boxed{a} \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & \boxed{b} \\ 0 & 0 & ib & 0 \\ 0 & -ib & 0 & 0 \\ \boxed{b} & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_a \equiv \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_a \left|\psi_n\right\rangle = \lambda_n \left|\psi_n\right\rangle$$

$$\left(\hat{B}_a - \lambda_n \mathbb{I}\right) \left|\psi_n\right\rangle = 0$$

Alors,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & b \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - b^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm b}$$

Alors,

$$\left|u_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left|u_4\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors, dans la base $\left|u_1\right\rangle, \left|u_2\right\rangle, \left|u_3\right\rangle, \left|u_4\right\rangle$:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(d) $\hat{A}$ et $\hat{B}$ forment-ils un ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC) ?

$$\left|u_1\right\rangle \equiv \left|ab\right\rangle \qquad \left|u_2\right\rangle \equiv \left|(-a)b\right\rangle$$
$$\left|u_3\right\rangle \equiv \left|(-a)(-b)\right\rangle \qquad \left|u_4\right\rangle \equiv \left|a(-b)\right\rangle$$

Donc c'est bien un Ensemble Complet Observables qui Commutent (ECOC)

Exercice 2.

1. **Donner la relation de commutation $[\hat{x},\hat{p}]$ entre les observables $\hat{x}$ et $\hat{p}$ où $\hat{x}$ et $\hat{p}$ désignent respectivement les opérateurs position et impulsion.**

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$$

2. **On introduit l'opérateur $\hat{U}(a) = \exp^{(-i\frac{a}{\hbar}\hat{p})}$ où a est une constante réelle. Montrer que $\hat{U}(a)$ est unitaire. Déterminer la valeur du commutateur $[\hat{U}(a),\hat{x}]$ et en déduire que**

$$\hat{U}(a)\,|x\rangle = |x+a\rangle$$

où $|x\rangle$ est défini par $\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$.

Un opérateur O est unitaire si

$$\hat{O}\hat{O}^{\dagger} = \hat{O}^{\dagger}\hat{O} = \mathbb{I}$$

Ici, du fait qu'on sait que $\hat{p}$ est un opérateur hermitien, alors,

$$\hat{U} = \exp^{(-i\frac{a}{\hbar}\hat{p})} \qquad \hat{U}^{\dagger} = \exp^{(+i\frac{a}{\hbar}\hat{p})}$$

Et c'est immédiat que

$$\hat{U}\hat{U}^{\dagger} = \hat{U}^{\dagger}\hat{U} = \mathbb{I}$$

Alors, $\hat{U}$ est un opérateur unitaire.

On se rappelle des ces deux propriétés du TD n°2 :

$$\exp^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!} \qquad\qquad [\hat{B},\hat{A}^n] = n\hat{A}^{n-1}[\hat{B},\hat{A}]$$

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{U}(a), \hat{x}\right] &= \hat{U}(a)\hat{x} - \hat{x}\hat{U}(a) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-i\frac{a}{\hbar}\hat{p}\right)^n}{n!} \times \hat{x} - \hat{x} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-i\frac{a}{\hbar}\hat{p}\right)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-i\frac{a}{\hbar}\right)^n}{n!} \left\{\hat{p}^n \times \hat{x} - \hat{x} \times \hat{p}^n\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-i\frac{a}{\hbar}\right)^n}{n!} \left[\hat{p}^n, \hat{x}\right] \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-i\frac{a}{\hbar}\right)^n}{n!} \left[\hat{x}, \hat{p}^n\right] \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-i\frac{a}{\hbar}\right)^n}{n!} \left(n\hat{p}^{n-1}[\hat{x}, \hat{p}]\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-i\frac{a}{\hbar}\right)^n}{n!} \left(n\hat{p}^{n-1} i\hbar\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^{n+1} a^n \frac{1}{\hbar^{n-1}} \hat{p}^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= i^2 \times a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^{n-1} \left(\frac{a}{\hbar}\right)^{n-1} \hat{p}^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= i^2 \times a \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \frac{(-i)^{\alpha} \left(\frac{a}{\hbar}\right)^{\alpha} \hat{p}^{\alpha}}{(\alpha)!} \\
&= -a\hat{U}(a)
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\boxed{\left[\hat{U}(a), \hat{x}\right] = -a\hat{U}(a)}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{U}(a), \hat{x}\right] |x\rangle &= -a\hat{U}(a) |x\rangle \\
\left(\hat{U}(a)\hat{x} - \hat{x}\hat{U}(a)\right) |x\rangle &= -a\hat{U}(a) |x\rangle \\
\hat{U}(a)x |x\rangle - \hat{x} \left(\hat{U}(a) |x\rangle\right) &= -a\hat{U}(a) |x\rangle \\
(x+a)\, \hat{U}(a) |x\rangle &= \hat{x} \left(\hat{U}(a) |x\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Ceci entraine que

$$
\hat{U}(a) |x\rangle = \lambda |x+a\rangle
$$

car on a la propriété que

$$\hat{x}\,|x+a\rangle = (x+a)\,|x+a\rangle$$

On a établi cette propriété pour tout a, alors en regardant $a=0$, on sait que $\lambda = 1$, alors

$$\boxed{\hat{U}(a)\,|x\rangle = |x+a\rangle}$$

3. On appelle représentation x (ou représentation position) du vecteur d'état $|\psi\rangle$, la fonction $\psi(x)$ définie par le produit scalaire : $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$. De même, on appelle représentation p (ou représentation impulsion), la fonction $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ où $|p\rangle$ est défini par $\hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle$.
En appliquant les résultats de la question précédente au cas où a est un paramètre infinitésimal ($|a| \ll 1$), montrer que l'on peut écrire $\langle x|\,\hat{U}^\dagger(a)\,|\psi\rangle = \psi(x+a)$ et en déduire que :

$$\langle x|\,\hat{p}\,|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$$

On prend le conjuguée hermitique de la relation du 2.

$$\langle x|\,\hat{U}^\dagger(a) = \langle x+a|$$

Alors,

$$\langle x|\,\hat{U}^\dagger(a)\,|\psi\rangle = \langle x+a|\psi\rangle = \psi(x+a)$$

On sait que $|a| \ll 1$, alors

$$\hat{U}^\dagger = \exp^{i\frac{a}{\hbar}\hat{p}} \simeq \mathbb{I} + i\frac{a}{\hbar}\hat{p}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\langle x|\left(\mathbb{I} + i\frac{a}{\hbar}\hat{p}\right)|\psi\rangle &= \psi(x+a) \\
\langle x|\psi\rangle + i\frac{a}{\hbar}\langle x|\,\hat{p}\,|\psi\rangle &= \psi(x+a) \\
\frac{i}{\hbar}\langle x|\,\hat{p}\,|\psi\rangle &= \frac{\psi(x+a)-\psi(x)}{a}
\end{aligned}$$

On fait tendre a vers 0, et on obtient immédiatement,

$$\boxed{\langle x|\,\hat{p}\,|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)}$$

4. Calculer $\langle x|\hat{p}^n|\psi\rangle$ où n est un entier strictement positif.

On pose $\varphi(x) = \hat{p}^{n-1}|\psi\rangle$

$$\langle x|\hat{p}^n|\psi\rangle = \langle x|\hat{p}|\varphi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x) = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x|\hat{p}^{n-1}|\psi\rangle$$

On peut alors faire par récurrence et obtenir immédiatement,

$$\boxed{\langle x|\hat{p}^n|\psi\rangle = \left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\psi(x)}$$

5. Choisir une représentation c'est se donner une base de l'espace d'état $\mathscr{E}$. Pour tout $|\psi\rangle$ de $\mathscr{E}$, on a

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(p)\,|p\rangle\,\mathrm{d}p = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,|x\rangle\,\mathrm{d}x$$

Donner les relations de fermeture associées aux bases $|x\rangle$ et $|p\rangle$.

$$|x\rangle \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}|x\rangle\langle x|\,\mathrm{d}x = \mathbb{I}}$$

$$|p\rangle \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}|p\rangle\langle p|\,\mathrm{d}p = \mathbb{I}}$$

6. Calculer $\langle\varphi|\hat{U}^\dagger(a)\hat{x}\hat{U}(a)|\varphi\rangle$ pour tout élément φ de $\mathscr{E}$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \hat{U}^\dagger(a)\hat{x}^n\hat{U}(a) = \left(\hat{x} + a\mathbb{I}_{\mathscr{E}}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
\langle\varphi|\hat{U}^\dagger(a)\hat{x}\hat{U}(a)|\varphi\rangle &= \langle\varphi|\hat{U}^\dagger(a)\left(\hat{U}(a)\hat{x} + \left[\hat{x},\hat{U}(a)\right]\right)|\varphi\rangle \\
&= \langle\varphi|\hat{U}^\dagger(a)\left(\hat{U}(a)\hat{x} + a\hat{U}(a)\right)|\varphi\rangle \\
&= \langle\varphi|\hat{x}|\varphi\rangle + a\langle\varphi|\varphi\rangle \\
&= \langle\varphi|\hat{x} + a\mathbb{I}|\varphi\rangle
\end{aligned}$$

Alors,

$$\hat{U}^\dagger(a)\hat{x}\hat{U}(a) = \hat{x} + a\mathbb{I}$$

On sait que

$$\left(\hat{U}^\dagger(a)\hat{x}\hat{U}(a)\right)^n = \hat{U}^\dagger(a)\hat{x}^n\hat{U}(a)$$

Alors immédiatement par le fait que $\hat{U}$ est un opérateur unitaire,

$$\boxed{\hat{U}^\dagger(a)\hat{x}^n\hat{U}(a) = (\hat{x} + a\mathbb{I})^n}$$

7. Soit $f(x)$, une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et développable en série entière. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \hat{U}^\dagger(a)f(\hat{x})\hat{U}(a) = f\left(\hat{x} + a\hat{\mathbb{I}}_{\mathscr{E}}\right)$$

En déduire la valeur du commutateur $[f(\hat{x}), \hat{p}]$.

$$[f(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar f'(\hat{x})$$

8. On note $p(x) = \langle x|p\rangle$, la représentation x de l'état $|p\rangle$. Montrer que $p(x)$ obéit à une équation différentielle que l'on déterminera.

$$p(x) = \langle x|p\rangle$$

$$\langle x|\,\hat{p}\,|\varphi\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)$$

Alors,

$$\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle$$

Si on pose $\varphi = p$ dans cette relation,

$$\langle x|\,\hat{p}\,|p\rangle = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$$

$$p\,\langle x|p\rangle = pp(x) = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x) = \frac{ip}{\hbar}p(x)$$

Alors,

$$\boxed{p(x) = N\exp^{\frac{i}{\hbar}px}}$$

9. Résoudre l'équation différentielle précédente en posant $p(0) = N$ comme constante d'intégration. Déterminer N en remarquant que $\delta(x - y) = \langle x|y\rangle$ où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac.
(On rappelle que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \exp^{iax} = \delta(a) \quad \text{et} \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

où $a \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}
\delta(x-y) &= \langle x|y\rangle \\
&= \langle x|\,\mathbb{I}\,|y\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x|p\rangle \langle p|y\rangle \,\mathrm{d}p \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)p^{\star}(y)\mathrm{d}p \\
&= |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \exp^{\frac{i}{\hbar}p(x-y)} \\
&= 2\pi|N|^2\delta\left(\frac{x-y}{\hbar}\right) \\
&= 2\pi|N|^2\hbar\delta(x-y)
\end{aligned}$$

Ce qui veux dire,

$$|N|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}$$

On peut prendre N réel, alors

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

Alors,

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp^{\frac{i}{\hbar}px}}$$

10. Établir les relations reliant $\psi(x)$ et $\psi(p)$.

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\psi(x)\,|x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\psi(p)\,|p\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\psi(x)\,|p\rangle \underbrace{\langle p|x\rangle}_{p^{\star}(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\psi(p)\,|p\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\frac{\psi(x)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp^{-\frac{i}{\hbar}px}\right)|p\rangle
\end{aligned}$$

Alors, l'un est la transformée de Fourier de l'autre,

$$\boxed{\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \psi(x) \exp^{-\frac{i}{\hbar}px}}$$

11. Écrire l'équation de Schrödinger en représentation x (équation différentielle vérifié par $\psi(x)$) dans le cas d'une particule de masse m évoluant dans un potentiel $V(\hat{x})$.

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

$$\langle x| \hat{H} |\psi\rangle = E \langle x|\psi\rangle$$