Faculté de physique et ingénierie
Université de Strasbourg

Université de Strasbourg

TD5 - Oscillateur harmonique

Jean-Pascal Lavoine

Transcrit par
Pierre Guichard

L3 Semestre 5 2020

Exercice 1

Le hamiltonien $\hat{H}$ d'un oscillateur harmonique à une dimension de masse m et de fréquence ω se met sous la forme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

où $\hat{x}$ et $\hat{p}$ représentent respectivement les opérateurs position et impulsion qui vérifient la relation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. On définit l'opérateur

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

1. Montrer la relation : $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

$$\begin{aligned}
[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left\{\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) - \left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)\right\} \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left\{i\frac{\hat{p}\hat{x}}{m\omega} + \hat{x}^2 - i\frac{\hat{x}\hat{p}}{m\omega} + \frac{\hat{p}^2}{m\omega} - \hat{x}^2 - i\frac{\hat{x}\hat{p}}{m\omega} + i\frac{\hat{p}\hat{x}}{m\omega} - \frac{\hat{p}^2}{m\omega}\right\} \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left\{\frac{i}{m\omega}(-2i\hbar)\right\} \\
&= -i^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Alors,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

2. On définit l'opérateur $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$.
   (a) Montrer que $\hat{N}$ est hermitique.

   $\hat{N}$ est hermitique si $\hat{N}^\dagger = \hat{N}$,

$$\hat{N}^\dagger = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^\dagger = (\hat{a})^\dagger\left(\hat{a}^\dagger\right)^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{N}$$

   (b) On note $|n\rangle$ le vecteur propre de $\hat{N}$ associé à la valeur propre n. En partant de la définition d'un opérateur hermitique, montrer que n est un nombre réel.

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

$$\langle n|\hat{N}|n\rangle = n\langle n|n\rangle \qquad\qquad \langle n|\hat{N}^\dagger|n\rangle = n^*\langle n|n\rangle$$

   Alors,

$$n = n^*$$

   Ce qui implique que n soit réel.

(c) Montrer que n est un nombre positif ou nul.

On pose $|\psi\rangle = \hat{a}\,|n\rangle$,

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle n|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle = \langle n|\,\hat{N}\,|n\rangle = n\,\underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} = n \geq 0$$

Alors n est un nombre positif ou nul grâce à la définition du produit scalaire comme une quantité positive ou nul.

(d) Montrer que les états $|n\rangle$ sont aussi vecteurs propres de $\hat{H}$ et déterminer la valeur propre correspondante E_n.

En peu de calculs on trouve,

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

Il est alors *trivial* que,

$$\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$$

Alors,

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

La plus petite valeur de n est 0, alors il y a une énergie minimale,

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

3. Calculer les commutateurs $[\hat{N}, \hat{a}]$ et $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = -a$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = +a^\dagger$$

4. Montrer les relations : $\hat{N}\left(\hat{a}^\dagger\,|n\rangle\right) = (n+1)\hat{a}^\dagger\,|n\rangle$ et $\hat{N}\left(\hat{a}\,|n\rangle\right) = (n-1)\hat{a}\,|n\rangle$.

$$\begin{aligned}
\hat{N}\left(\hat{a}^\dagger\,|n\rangle\right) &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|n\rangle \\
&= \hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1\right)|n\rangle \\
&= \hat{a}\hat{N}\,|n\rangle - \hat{a}^\dagger\,|n\rangle \\
&= \hat{a}n\,|n\rangle - \hat{a}^\dagger\,|n\rangle \\
&= (n+1)\hat{a}\,|n\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{N}\left(\hat{a}\left|n\right\rangle\right) &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\left|n\right\rangle \\ &= \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1\right)\hat{a}\left|n\right\rangle \\ &= \hat{a}\hat{N}\left|n\right\rangle - \hat{a}\left|n\right\rangle \\ &= \hat{a}n\left|n\right\rangle - \hat{a}\left|n\right\rangle \\ &= (n-1)\hat{a}\left|n\right\rangle\end{aligned}$$

5. En effectuant un choix de phase convenable et en calculant $\|\hat{a}\left|n\right\rangle\|$, montrer que

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$$

D'après la relation précédente,

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = \text{Constante}\left|n-1\right\rangle$$

$$\left\langle n\right|\hat{a}^\dagger\hat{a}\left|n\right\rangle = n = \left|\text{Constante}\right|^2 \rightarrow \text{Constante} = \sqrt{n}$$

Alors,

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$$

6. Calculer $\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle$. On notera que le choix de phase effectué à la question précédente est définitif. En conséquence, il faut donc établir $\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle$ par un calcul direct sans passer par le calcul d'une norme.

$$\begin{aligned}\hat{N}\left|n\right\rangle &= n\left|n\right\rangle \\ \hat{a}^\dagger\hat{a}\left|n\right\rangle &= n\left|n\right\rangle \\ \hat{a}^\dagger\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle &= n\left|n\right\rangle \\ \hat{a}^\dagger\left|n-1\right\rangle &= \sqrt{n}\left|n\right\rangle \\ \hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle &= \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle\end{aligned}$$

7. En appliquant l'opérateur $\hat{a}$ de manière itérative à un ket $\left|n\right\rangle$, montrer que n est un entier.

$$\left|\psi\right\rangle = \hat{a}\left|0\right\rangle$$

Alors,

$$\left\langle\psi|\psi\right\rangle = \left\langle 0\right|\hat{N}\left|0\right\rangle = 0$$

Alors,

$$\hat{a}\left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle$$

n est entier car sinon quand on en "détruit" un par $\hat{a}$, on ne pourrais pas tombé sur $\left|0\right\rangle$.

8. D'après les questions précédentes, $\hat{a}\left|0\right\rangle = 0$. Établir l'équation différentielle donnant la fonction $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ et donner sa solution.

$$\hat{a}\left|0\right\rangle = 0\left|0\right\rangle$$

Alors,

$$\left\langle x\right|\hat{a}\left|0\right\rangle = 0$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left\langle x\right|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}+i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)\left|0\right\rangle &= 0\\
\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left\langle x\right|\hat{x}\left|0\right\rangle + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{i}{m\omega}\right)\left\langle x\right|\hat{p}\left|0\right\rangle &= 0\\
\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left\langle x\right|\hat{x}\left|0\right\rangle + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{i}{m\omega}\right)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_0(x)\right) &= 0\\
\left\langle x\right|\hat{x}\left|0\right\rangle + \left(\frac{i}{m\omega}\right)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_0(x)\right) &= 0\\
x\psi_0(x) + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_0(x) &= 0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_0(x) + \frac{xm\omega}{\hbar}\psi_0(x) &= 0
\end{aligned}$$

On trouve,

$$\psi_0(x) = K\exp^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

Et alors, avec la normalisation on trouve,

$$K = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

9. Calculer $\psi_1(x)$, la fonction d'onde du premier état excité.

$$\psi_1(x) \to \hat{a}^\dagger\left|0\right\rangle = \left|1\right\rangle$$

Alors,

$$\left\langle x\right|\hat{a}^\dagger\left|0\right\rangle = \langle x|1\rangle$$

$$\left\langle x\right|\hat{a}^\dagger\left|0\right\rangle = \psi_1(x)$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x\exp^{m\omega x^2/2\hbar}$$

Exercice 2

On considère un oscillateur harmonique à une dimension, de masse m et de pulsation ω. Le hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

On note $\{|n\rangle\}$ la base propre de $\hat{H}$. On introduit les observables $\hat{X} = \hat{x}\sqrt{m\omega/\hbar}$ et $\hat{P} = \hat{p}/\sqrt{m\hbar\omega}$ et les opérateurs $\hat{a} = \left(\hat{X} + i\hat{P}\right)/\sqrt{2}$ et $\hat{a}^\dagger = \left(\hat{X} - i\hat{P}\right)/\sqrt{2}$.

1. On suppose qu'à $t = 0$ le système est dans l'état $|\psi_n(0)\rangle = |n\rangle$. Donner $|\psi_n(t)\rangle$ l'état du système à l'instant t.

$$|\psi_n(t)\rangle = \exp^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n\rangle$$

2. Calculer les valeurs moyennes $\langle\hat{x}\rangle$ et $\langle\hat{p}\rangle$ à l'instant t, l'oscillateur étant dans l'état $|\psi_n(t)\rangle$

$$\langle\hat{x}\rangle = \langle x|\,\hat{x}\,|x\rangle$$

On sait que

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

Et alors,

$$\langle\hat{x}\rangle = 0 \qquad\qquad \langle\hat{p}\rangle = 0$$

3. Calculer les écarts-type $\Delta\hat{x}$ et $\Delta\hat{p}$.

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}^2\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|\,(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2\,|n\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|\,\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2}\,|n\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|\,\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|\,1 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|\,1 + 2\hat{N}\hat{a}\,|n\rangle \\
&= \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Alors,

$$\Delta \hat{x} = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Delta \hat{p} = \sqrt{m\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \geq \frac{\hbar}{2}$$

Dans l'état fondamental on minimise la relation de Heisenberg.

4. Montrer que l'état

$$|\alpha\rangle = \exp^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

est état propre normé de $\hat{a}$ pour la valeur propre α.

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$$

état "quasi-classique" parfois appelé état cohérents.

$$\begin{aligned}
\hat{a}|\alpha\rangle &= \exp^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{a}|n\rangle \\
&= \exp^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\
&= \alpha \exp^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\
&= \alpha |\alpha\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha|\alpha\rangle &= \exp^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \langle n|n\rangle \\
&= \exp^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \\
&= \exp^{-|\alpha|^2} \exp^{|\alpha|^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

5. Calculer les valeurs moyennes $\langle \hat{x} \rangle$ et $\langle \hat{p} \rangle$ dans un état $|\alpha\rangle$ ainsi que les écarts-type Δx et Δp.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x} \rangle &= \langle \alpha | \, \hat{x} \, | \alpha \rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha | \, (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \, | \alpha \rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha + \alpha^*)
\end{aligned}$$

$$\langle \hat{p} \rangle = i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha)$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}^2 \rangle &= \langle \alpha | \, \hat{x}^2 \, | \alpha \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | \, (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \, | \alpha \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | \, \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} \, | \alpha \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\alpha^2 + \alpha^{*2} + \langle \alpha | \, 1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \, | \alpha \rangle \right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 1 + 2|\alpha|^2 \right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left((\alpha + \alpha^*)^2 + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\Delta \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\Delta \hat{p} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$$

6. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, l'oscillateur est dans un état $|\alpha_0\rangle$ avec $\alpha_0 = \rho \exp^{i\Phi}$ où ρ est un nombre réel positif. Déterminer $|\psi(t)\rangle$, l'état du système à l'instant t.

$$|\psi(t=0)\rangle = \exp^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \exp^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n \exp^{-i\hbar E_n t}}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

où $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \exp^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_0^n \exp^{-i\omega(n+1/2)t}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
&= \exp^{-i\omega t/2} \exp^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_0 \exp^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle
\end{aligned}
$$

On peut écrire $\alpha_0' = \alpha_0 \exp^{-i\omega t}$.

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \exp^{-i\omega t/2} \exp^{-\left|\alpha_0'\right|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_0'(t))^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
&= \exp^{-i\omega t/2} |\alpha_0'(t)\rangle
\end{aligned}
$$

7. Évaluer dans l'état $|\psi(t)\rangle$ les valeurs moyennes $\langle\hat{x}\rangle(t)$ et $\langle\hat{p}\rangle(t)$ et justifier brièvement l'appellation d'état quasi-classique pour l'état $|\alpha\rangle$.

Les expressions que nous avons obtenu précédemment pour les valeurs moyennes reste de la même forme, on a juste à changer α en α_0'.

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\alpha_0'(t) + \alpha_0'^*(t)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\alpha_0 \exp^{-i\omega t} + \alpha_0^* \exp^{i\omega t}\right)
\end{aligned}
$$

On pose $\alpha_0 = \rho \exp^{i\Phi}$, alors

$$
\langle\hat{x}\rangle = 2\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \rho \cos(\omega t - \Phi)
$$

On appelle état quasi-classique car on retrouve bien l'oscillation sur la valeur moyenne, comme un oscillateur harmonique classique.

Exercice 3

I - Préliminaires

Soit l'opérateur $\hat{f}(t)$ fonction du paramètre t

$$\hat{f}(t) = \exp\left(t\hat{A}\right)\hat{B}\exp\left(-t\hat{A}\right)$$

où $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont deux opérateurs.

1. Montrer que $\mathrm{d}\hat{f}/\mathrm{d}t = \left[\hat{A}, \hat{f}(t)\right]$, $\mathrm{d}^2\hat{f}/\mathrm{d}t^2 = \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{f}(t)\right]\right]$, etc
2. En déduire

$$\exp^{t\hat{A}}\hat{B}\exp^{-t\hat{A}} = \hat{B} + \frac{t}{1!}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{t^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots$$

II - États comprimés de l'oscillateur harmonique

On considère l'opérateur $\hat{S} = \frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})$ où r est un nombre réel et où $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ sont les opérateurs d'annihilation et de création précédemment définis dans l'exercice 2.

3. Calculer les commutateurs $[\hat{a}, \hat{S}]$ et $[\hat{a}^\dagger, \hat{S}]$.
4. Soit l'opérateur $\hat{T}(r) = \exp\left(\hat{S}\right)$. Montrer que $\hat{T}(r)$ est un opérateur unitaire.
5. On s'intéresse à l'état $|r\rangle$ défini par la relation $|r\rangle = \hat{T}(r)\,|0\rangle$, où $|0\rangle$ est l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Pour déterminer les propriétés de $|r\rangle$, il est nécessaire de construire l'opérateur $\hat{b}(r) = \hat{T}^\dagger(r)\hat{a}\hat{T}^\dagger(r)$.
   (a) Calculer le commutateur $[\hat{b}(r), \hat{b}^\dagger(r)]$.
   (b) Établir la relation $\hat{b}(r) = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r$.
6. On suppose l'oscillateur préparé dans l'état $|r\rangle$, calculer les valeurs moyennes $\langle\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{a}^\dagger\rangle$, $\langle\hat{a}^2\rangle$, $\langle(\hat{a}^\dagger)^2\rangle$, $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$ et $\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle$.
7. L'oscillateur étant dans l'état $|r\rangle$, calculer les écarts quadratiques moyens $\Delta\hat{x}$ et $\Delta\hat{p}$ des opérateurs position et impulsion.

$$\Delta\hat{x} = \frac{\hbar}{2m\omega}\exp^{-r}$$

$$\Delta\hat{p} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\exp^{r}$$

8. Commenter la valeur du produit $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$. Justifier l'appellation d'état comprimé pour l'état $|r\rangle$.