Université de Strasbourg

TD7 - Corps noir et distribution des vitesses

Jérôme Tribollet

Transcrit par

Pierre Guichard

L3 Semestre 5 2020

1 Rayonnement du corps noir

1. Décrire qualitativement le rayonnement du corps noir idéal (parfois appeler "rayonnement de la cavité en équilibre thermodynamique avec le corps noir"). Indiquer quelques réalisations/applications possible du modèle utilisé en première approximation.

   C'est le rayonnement des modes du champ électromagnétique en équilibre en équilibre thermodynamique avec le corps noir, qui servira de thermostat qui absorbe à toutes les longueurs d'ondes.

2. Calculer la densité d'état en énergie du champ électromagnétique dans une cavité de volume V (avec les conditions limites périodiques). On admettra que les modes propres du champ électromagnétique de la cavité ont un hamiltonien qui est une somme d'oscillateurs harmoniques $1D$, aux différentes fréquences f, $E = hf$ étant l'énergie d'un photon possible dans la cavité. *Exemple :* $H_f = hf(n_f + 1/2)$

   On sait que

   $$E = \hbar c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

   Alors,

   $$\rho(E) = \frac{\partial\Omega(0 \to E)}{\partial E} = \mathrm{cst}VE^2$$

   $$\Omega(0 \to E) = \frac{4/3\pi\left|\vec{k}\right|^3}{(2\pi/L)^3} = \mathrm{cst}VE^3$$

3. Calculer le nombre moyen de photons d'énergie $E = hf$ donnée, noté $\langle n_f\rangle(T)$, présents dans la cavité, le champ électromagnétique étant supposé en équilibre thermodynamique à la température T avec le corps noir.

   $$H_{\mathrm{champ}\vec{E},\vec{B}} = \iiint \mathrm{d}^3\vec{r}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0\left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{B}(\vec{r})\right|}{\mu_0}\right)$$

   A l'aide d'une transformée de Fourier, on peut faire la décomposition du champ en *ondes plane progressive monochromatique* (OPPM).

   $$\vec{E}(\vec{r}, t) = \iiint \vec{E}_k(t)\exp^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Les composantes OPPM se comportent comme un oscillateur harmonique.

$$(\hat{x}, \hat{p}_x) \to (\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k)$$
$$(\vec{E}_k, \vec{B}_k) \to (\vec{A}_k, \dot{\vec{A}}_k)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \hat{a}_k^\dagger = \text{ combinaison linéaire } (\vec{E}_k, \vec{B}_k) \\ \hat{a}_k = \text{opérateur annhilitation d'un photon} \end{cases}$$

Et alors,

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}\right)$$

Et donc, dans le cas du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$,

$$H_{\text{champ}} = \sum_f hf \left(\hat{a}_f^\dagger \hat{a}_f + \frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$h_f = hf \left(\hat{a}_f^\dagger \hat{a}_f + \frac{1}{2}\right) = hf \left(\hat{n}_f + \frac{1}{2}\right)$$

Alors,

$$\begin{aligned} z_f(T) &= \sum_{n_f=0}^{+\infty} \exp^{-\beta hf(n_f+1/2)} \\ &= \exp^{-\beta hf/2} \sum_{n_f=0}^{+\infty} \exp^{-\beta hf n_f} \end{aligned}$$

Et on sait que la somme d'une série géométrie de raison r quand $|r| < 1$ converge vers,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |q|^n = \frac{1}{1-q}$$

Alors,

$$\begin{aligned} z_f(T) &= \exp^{-\beta hf/2} \times \frac{1}{1 - \exp^{-\beta hf}} \\ &= \frac{1}{2\sinh(\beta hf/2)} \end{aligned}$$

Alors on peut calculer le nombre moyen de photons,

$$\begin{aligned}\langle n_f\rangle(T) &= \sum_{\{n_f\}} n_f P(n_f,T)\\ &= \sum_{n_f=0}^{\infty} n_f \frac{\exp^{-\beta hf(n_f+1/2)}}{z_f}\end{aligned}$$

où

$$P(n_f,T) = \frac{\exp^{-\beta hf(n_f+1/2)}}{z_f(T)}$$

D'où

$$\boxed{\langle n_f\rangle(T) = \sum_{n_f=0}^{\infty} n_f \frac{\exp^{-\beta hf(n_f+1/2)}}{z_f}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln z_f(T)}{\partial(\beta hf)} &= \frac{1}{z_f(T)}\frac{\partial z_f(T)}{\partial(\beta hf)}\\ &= \frac{1}{z_f(T)}\frac{\partial}{\partial(\beta hf)}\left(\sum_{n_f=0}^{+\infty}\exp^{-\beta hf(n_f+1/2)}\right)\\ &= \frac{1}{z_f(T)}\sum_{n_f=0}^{+\infty} -(n_f+1/2)\exp^{-\beta hf(n_f+1/2)}\\ &= -\sum_{n_f=0}^{+\infty}(n_f+1/2)P(n_f,T)\\ &= -\left(\langle n_f\rangle + \frac{1}{2}\right)\\ &= -\frac{\partial \ln(2\sinh(\beta hf/2))}{\partial(\beta hf)}\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\left(\langle n_f\rangle + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\partial \ln(2\sinh(\beta hf/2))}{\partial(\beta hf)}\\ &= \frac{2\frac{1}{2}\cosh(\beta hf/2)}{2\sinh(\beta hf/2)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\cosh}{\sinh}\left(\frac{\beta hf}{2}\right)\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\langle n_f\rangle(T) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\cosh}{\sinh}\left(\frac{\beta hf}{2}\right)-1\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\exp^{\alpha}+\exp^{-\alpha}}{\exp^{\alpha}-\exp^{-\alpha}}-1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\exp^{-\alpha}}{\exp^{\alpha}-\exp^{-\alpha}}\right)\\ &= \frac{1}{\exp^{2\alpha}-1}\end{aligned}$$

Ce qui permet de trouver,

$$\boxed{\langle n_f\rangle(T) = \frac{1}{\exp(\beta hf)-1}}$$

4. En déduire la puissance rayonnée par le corps noir à T, entre f et $f+\mathrm{d}f$.

$$\rho(E)\mathrm{d}E = \rho(f)\mathrm{d}f = \mathrm{cst}VE^2\mathrm{d}E = \mathrm{cst}Vh^2f^2\mathrm{d}f$$

Et on se rappelle,

$$\langle n_f\rangle(T) = \frac{1}{\exp(\beta hf)-1}$$

La puissance rayonnée par le corps noir,

$$\mathcal{P}_f = \mathcal{P}_{\text{énergie}}(hf\langle n_f\rangle(T))\cdot\rho(f)\mathrm{d}f$$

D'où,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{rayonnée entre f et f+df}}(T) &= \left(hf\frac{1}{\exp(\beta hf-1)}\right)\left(\mathrm{cst}f^2\mathrm{d}f\right)\\ &= \mathrm{cst}\frac{f^3}{\exp(\beta hf)-1}\mathrm{d}f\end{aligned}$$

5. Trouver la loi de Wien donnant la longueur d'onde d'émission maximum en fonction de T d'un corps noir, dans la limite des hautes fréquences, à T fixé. Commenter pour un homme à $37°C$ et pour la surface du soleil à $6000K$.

$$\lim_{T\to 0} = 0 \qquad\qquad \lim_{T\to+\infty} = 0$$

On cherche alors le maximum,

$$\frac{\partial}{\partial f}\left(f^3\exp^{-\beta hf}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}0 &= 3f^2 \exp^{-\beta hf} + f^3(-\beta h) \exp^{-\beta hf} \\ &= f^2(3f - f\beta h) \exp^{-\beta hf}\end{aligned}$$

Alors, soit $f = 0$ (mais c'est impossible) ou $\beta h f_{\max} = 3$,

$$\boxed{h f_{\max} = 3k_B T = \frac{hc}{\lambda_{\max}}}$$

Alors,

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{3k_B} = \text{cst}$$

Loi de Wien dans la limite des hautes fréquences,

$$\lambda_{\max} T = 2900 \mu\text{m.K}$$

2 Distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann dans un gaz parfait semi-classique

On considère N molécules d'un gaz parfait classique contenu dans un volume V, maintenu à la température T.

1. Calculer $\mathrm{d}N(v_x, v_y, v_z, T)$, le nombre de molécules dont les composantes des vitesses sont comprises entre v_x et $v_x + \mathrm{d}v_x$, v_x et $v_y + \mathrm{d}v_y$, v_z et $v_x + \mathrm{d}v_z$, à T.

   On connait la fonction de partition d'un gaz parfait semi-classique,

$$Z(N,T) = \frac{1}{N!}(z(1,T))^N$$

   où

$$z(1,T) = \frac{V}{\Lambda^3(T)}$$

   (On se place dans la situation où les particules sont de spin nul).

   > **Remarque :** Dans la situation où les particules serais de spin non nul, il y aurais alors $2s+1$ valeurs possibles de m_{sz}, et donc si $g(s)$ caractérise le degré de dégénérescence,
   >
   > $$z(1,T) = \frac{V}{\Lambda^3(T)}g(s)$$

   Loi de probabilité jointe du gaz parfait semi-classique,

$$\begin{aligned}
P_{\text{jointe}}(\vec{r}_1, \vec{p}_1, ..., \vec{r}_N, \vec{p}_N, T)\mathrm{d}^3\vec{r}_1\mathrm{d}^3\vec{p}_1...\mathrm{d}^3\vec{r}_N\mathrm{d}^3\vec{p}_N &= \frac{\exp\left(-\beta\left(\sum_{j=1}^N \frac{\vec{p}_j^2}{2m}\right)\right)\Pi_{j=1}^N \mathrm{d}^3\vec{r}_j\mathrm{d}^3\vec{p}_j}{N!Z(N,T)h^{3N}} \\
&= \Pi_{j=1}^N \frac{\exp\left(-\beta\frac{\vec{p}_j}{2m}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}_j\mathrm{d}^3\vec{p}_j}{z(1,T)h^3} \\
&= \Pi_{j=1}^N P^{(1)}_{\text{réduite}}(\vec{r}_j, \vec{p}_j, T)\mathrm{d}^3\vec{r}_j\mathrm{d}^3\vec{p}_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}N(v_x, v_y, v_z, T) &= NP^{(1)}(\vec{v}, T)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z \\
&= NP^{(1)}(v_x, v_y, v_z, T)\mathrm{d}v_x, \mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z
\end{aligned}$$

   Or, on a

$$P^{(1)}(\vec{r}, \vec{p}, T)\mathrm{d}^3\vec{r}\mathrm{d}^3\vec{p} = \frac{\exp\left(-\beta\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}\mathrm{d}^3\vec{p}}{z(1,T)h^3}$$

$$\begin{aligned} P^{(1)}_{\text{réduite}}(\vec{p},\vec{r})\mathrm{d}^3\vec{p} &= \int_V P^{(1)}(\vec{r},\vec{p},T)\mathrm{d}^3\vec{r}\mathrm{d}^3\vec{p} \\ &= \frac{V\exp\left(-\beta\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)\mathrm{d}^3\vec{p}}{h^3 z(1,T)} \end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{\mathrm{d}N(\vec{v},T) = N\frac{V}{h^3 z(1,T)}\exp\bigl(-\beta m\vec{v}^2/2\bigr)m^3\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z}$$

2. En déduire $\mathrm{d}N(\mathrm{mod}(v))$, le nombre de molécules dont le module de la vitesse est compris entre $\mathrm{mod}(v)$ et $\mathrm{mod}(v)+\mathrm{dmod}(v)$, à T.

   On vas passé en coordonnées sphériques

$$\boxed{\mathrm{d}N(|\vec{v}|,\theta_v,\phi_v,T) = \frac{n^3 NV}{h^3 z(1,T)}\exp\bigl(\beta m|\vec{v}|^2/2\bigr)|\vec{v}|^2\mathrm{d}\vec{v}4\pi}$$

3. En déduire le module de la vitesse la plus probable à T.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u^2\exp\bigl(-1/2\beta m u^2\bigr)\right) = 0$$

   Ce qui implique,

$$2u\exp^{-1/2\beta m v^2} + u^2(-\beta m\exp^{-1/2\beta m u^2}) = 0$$

$$u\exp^{-\beta m u^2/2}(2-\beta m u^2) = 0$$

   On trouve,

$$\beta m u^2 = 2$$

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2_{\max} = k_B T$$

$$\langle\frac{1}{2}m\vec{v}^2\rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

   On trouve approximativement,

$$|\vec{v}|_{\max} = 500\ \mathrm{m.s}^{-1}$$