Faculté
de physique et ingénierie
Université de Strasbourg

University of Strasbourg

Exam — Session 1

T. Charitat, J. Farago, G. Weick

Transcribed by
Pierre Guichard

M1-S1 2016-2017

Ferromagnétisme et antiferromagnétisme

On considère un modèle d'Ising en dimension d, constitué de $N \gg 1$ spins d'Ising $s_i = \pm 1$ à la température T, disposés aux noeuds i d'un réeau hypercubique. On notera $\beta = 1/k_B T$, avec k_B la constante de Boltmann. On appelle h le champ magnétique extérieur (en unité d'énergie) et on ne considère que des interactions entre plus proches voisins. Le hamiltonien du système s'écrit alors

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_{i=1}^{N} s_i, \tag{1}$$

où $\langle i, j \rangle$ représente une somme sur les plus proches voisins i et j.

1 Ferromagnétisme et approximation de champ moyen

Dans cette première partie du problème, la constante de couplage J est positive et on la notera $J = J_{\mathrm{F}}$ avec $J_{\mathrm{F}} > 0$.

1.1 Généralités

1. À quoi correspondent les différents termes du hamiltonien (1) ?

   Le terme $-J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j$ rend compte de l'énergie d'intéraction entre les premiers voisins, où J est la constante de couplage et $\langle ., . \rangle$ les premier voisins.
   Le terme $-h \sum_{i=1}^{N} s_i$ rend compte de l'énergie d'interaction entre un spin au site i et le champ magnétique.

2. Soit z le nombre de premiers voisins d'un site. Exprimer z en fonction de la dimension de l'espace d.

$$z = 2d$$

1.2 Modèle sans interaction

On commence par négliger les interactions entre spins.

1. Calculer la fonction de partition canonique Z et l'énergie libre F du système.

   Pas d'intéractions, c'est-à-dire $J = 0$,

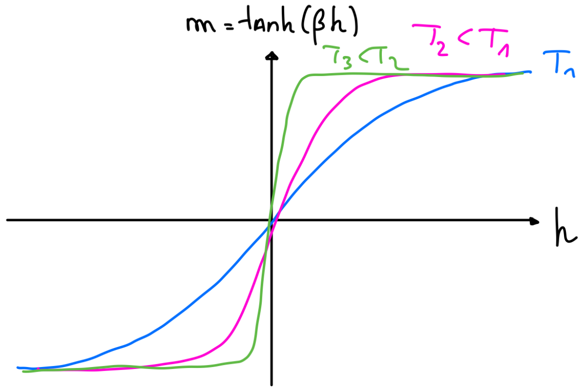
$$\mathcal{H} = -h \sum_{i=1}^{N} s_i$$

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s_0} \cdots \sum_{s_N} e^{-\beta \mathcal{H}} \\ &= \sum_{s_0} \cdots \sum_{s_N} e^{\beta h \sum_{i=1}^{N} s_i} \\ &= \sum_{\{s_k\}} \prod_i e^{\beta h s_i} \\ &= \prod_i \sum_{s_i = \pm 1} e^{\beta h s_i} \\ &= \prod_i \left\{ e^{-h\beta} + e^{+h\beta} \right\} \\ &= \prod_i (2 \cosh(\beta h)) \\ &= (2 \cosh(\beta h))^N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= -k_B T \ln Z \\ &= -N k_B T \ln(2 \cosh(\beta h)) \end{aligned}$$

2. En déduire l'aimantation moyenne $m = \langle s_i \rangle$ par site. Représenter m en fonction du champ appliqué.

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial h} \\ &= k_B T \frac{\partial}{\partial h} \ln(2 \cosh(\beta h)) \\ &= k_B T \beta \tanh(\beta h) \\ &= \tanh(\beta h) \end{aligned}$$



1.3 Approximation de champ moyen

On prend maintenant en compte les interactions entre spins.

1. Justifier du fait que dans l'approximation de champ moyen, $s_i s_j \simeq (s_i + s_j)m - m^2$ pour $i \neq j$.

$$s_i = \langle s_i \rangle + \delta s_i = m + \delta s_i$$
$$s_i = \langle s_i \rangle + \delta s_j = m + \delta s_j$$

   Alors,

$$\begin{aligned} s_i s_j &= (m + \delta s_i)(m + \delta s_j) \\ &= m^2 + m(\delta s_i + \delta s_j) + \delta s_i \delta s_j \\ &\approx m^2 + m(s_i - m + s_j - m) \\ &= (s_i + s_j)m - m^2 \end{aligned}$$

   Dans l'approximation de champ moyen, on néglige les intéraction entre les spins, c'est pour ça que $\delta s_i \delta s_j \approx 0$.

2. En déduire que dans cette approximation, le hamiltonien (1) prend la forme

$$\mathcal{H} = -(zJ_{\mathrm{F}}m + h)\sum_{i=1}^{N} s_i + \frac{1}{2}NzJ_{\mathrm{F}}m^2.$$

   Interpréter physiquement le terme $zJ_{\mathrm{F}}m + h$ dans l'expression ci-dessus.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -J\sum_{\langle i,j\rangle} s_i s_j - h\sum_{i=1}^{N} s_i \\
&\approx -J_{\mathrm{F}}\sum_{\langle i,j\rangle}((s_i+s_j)m - m^2) - h\sum_{i=1}^{N} s_i \\
&= J_{\mathrm{F}} m^2 \underbrace{\sum_{\langle i,j\rangle}(1)}_{=\frac{1}{2}Nz} - J_F m \underbrace{\sum_{\langle i,j\rangle}(s_i+s_j)}_{=2\sum_{\langle i,j\rangle} s_i} - h\sum_{i=1}^{N} s_i \\
&= -(zJ_{\mathrm{F}}m + h)\sum_{i=1}^{N} s_i + \frac{1}{2}NzJ_{\mathrm{F}}m^2
\end{aligned}
$$

Le terme qui s'ajoute à h peut-être vu comme un champ additionnel généré par les autres spin, on mentionne parfois $h + zJ_{\mathrm{F}}m$ comme étant un champ moléculaire.

3. Calculer la fonction de partition canonique Z et l'énergie libre F du système en champ moyen.

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{s_0}\cdots\sum_{s_N} e^{-\beta\mathcal{H}} \\
&= \sum_{\{s_k\}} e^{-\beta[-(zJ_{\mathrm{F}}m+h)\sum_{i=1}^{N} s_i + \frac{1}{2}NzJ_{\mathrm{F}}m^2]} \\
&= e^{-\frac{\beta}{2}NzJ_{\mathrm{F}}m^2}\sum_{\{s_k\}}\prod_i e^{\beta(zJ_{\mathrm{F}}m+h)s_i} \\
&= e^{-\frac{\beta}{2}NzJ_{\mathrm{F}}m^2}\prod_i\sum_{s_i=\pm1} e^{\beta(zJ_{\mathrm{F}}m+h)s_i} \\
&= e^{-\frac{\beta}{2}NzJ_{\mathrm{F}}m^2}\prod_i\left\{e^{-\beta(zJ_{\mathrm{F}}m+h)} + e^{+\beta(zJ_{\mathrm{F}}m+h)}\right\} \\
&= e^{-\frac{\beta}{2}NzJ_{\mathrm{F}}m^2}\prod_i(2\cosh(\beta(zJ_{\mathrm{F}}m+h))) \\
&= e^{-\frac{\beta}{2}NzJ_{\mathrm{F}}m^2}(2\cosh(\beta(zJ_{\mathrm{F}}m+h)))^N
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
F &= -k_B T\ln Z \\
&= \frac{N}{2}zJ_{\mathrm{F}}m^2 - Nk_BT\ln(2\cosh(\beta(zJ_{\mathrm{F}}m+h)))
\end{aligned}
$$

4. Montrer que l'aimantation moyenne m par site est solution d'une équation d'autocohérence que l'on explicitera.

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{N}\frac{\partial F}{\partial h} \\ &= k_B T \frac{\partial}{\partial h} \ln(2\cosh(\beta(zJ_{\mathrm{F}}m + h))) \\ &= \tanh(\beta(zJ_{\mathrm{F}}m + h)) \end{aligned}$$

5. On se place à champ magnétique extérieur nul ($h = 0$). Montrer qu'il existe une transition de phase (paramagnétique-ferromagnétique) pour une température critique T_c que l'on exprimera en fonction des differents paramètres du problème. Que prévoit l'approximation pour le cas $d = 1$? Comparer à la solution exacte du modèle d'Ising à une dimension. Commenter.

Pour $h = 0$, l'équation d'autocohérence devient

$$m = \tanh(\beta z J_{\mathrm{F}} m)$$

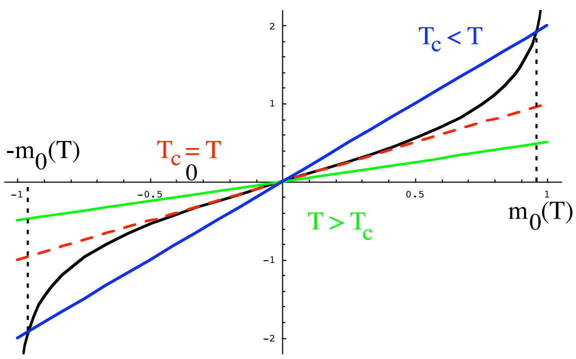
Ce qu'on peut réecrire,

$$\operatorname{arctanh}(m) = \beta z J_{\mathrm{F}} m$$

Cette équation dépend de la température T du système. Il y a alors trois régimes. On peut définir la température critique T_c par

$$k_B T_c = z J_{\mathrm{F}}$$

Ainsi,



Alors, on vois que dans le cadre 1D, on obtient bien une transition de phase. Alors, que, Ising dans sa thèse a démontré que en 1D il n'y a pas de transition de phase. Cela peut se comprendre par le fait que, la méthode de champ moyen est valide à partir du moment où on a un nombre conséquent de voisin sur lequel faire la moyenne, dans le cas unidimensionnel, il n'y a pas assez de voisin, alors que en dimension 2 et 3 on commence a avoir une bonne approximation de la réalité par cette approximation.

6. Au voisinage de la température critique, trouver les valeurs des exposants critiques β et γ dans l'approximation de champ moyen [1]. On rappelle que l'aimantation par site m et la susceptibilité magnétique χ se comporte près du point critique comme

$$m \sim (T_c - T)^{\beta}, \qquad \chi = \left.\frac{\partial m}{\partial h}\right|_{(h=0)} \sim (T - T_c)^{-\gamma}.$$

On peut réecrire l'équation d'autocohérence,

$$m = \tanh\left(\frac{T_c}{T} m\right)$$

Alors en faisant un développement de Taylor,

$$m \approx \frac{T_c}{T} m - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T} m\right)^3$$

On remarque que $m = 0$ est une solution, alors en faisant la supposition que $m \neq 0$,

$$1 = \frac{T_c}{T} - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T}\right)^3 m^2$$

Alors,

$$3\frac{T_c}{T} - 3 = \left(\frac{T_c}{T}\right)^3 m^2$$

C'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
m^2 &= 3\left(\frac{T_c}{T}\left(\frac{T}{T_c}\right)^3 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3\right) \\
&\propto \left(\frac{T^2}{T_c^2} - \frac{T^3}{T_c^3}\right) \\
&= \left(\frac{T^2 T_c}{T_c^3} - \frac{T^3}{T_c^3}\right) \\
&\propto (T_c - T)
\end{aligned}$$

Alors,

$$m \propto (T_c - T)^{1/2}$$

1. On donne $\tanh x = x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)$

Donc $\beta_{\mathrm{MFA}} = 1/2$.

$$m = \tanh(\beta(zJ_{\mathrm{F}}m + h)) \approx \beta zJ_{\mathrm{F}}m + \beta h$$

Alors,

$$m\left(1 - \frac{T_c}{T}\right) \approx \frac{h}{k_B T}$$

C'est-à-dire,

$$m \approx \frac{h}{k_B(T - T_c)}$$

$$\chi = \left.\frac{\partial m}{\partial h}\right|_{h=0} \propto \frac{1}{(T - T_c)}$$

Donc $\gamma_{\mathrm{MFA}} = 1$.

2 Antiferromagnétisme

Dans cette seconde partie du problème, la constante de couplage est négative, et on la notera $J = -J_{\mathrm{AF}}$ avec $J_{\mathrm{AF}} > 0$.

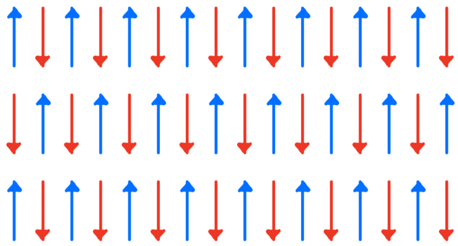
2.1 Généralités

1. Quel est maintenant l'effet du premier terme du hamiltonien (1) sur l'orientation des spins ?

   Désormais, l'hamiltonien est,

$$\mathcal{H} = J_{\mathrm{AF}} \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_{i=1}^{N} s_i$$

   Ce premier terme désormais, plutôt que de forcé l'alignement des spins, il vas forcé un anti-alignements des spins, comme sur ce schéma,



2. On se place à température nulle. Justifier que le système se sépare en deux sous-réseaux A et B, tels que les spins prennent la valeur $+1$ ou -1 suivant le sous-réseau auquel ils appartiennent. Ces états sont appelés états de Néel. Combien existe-t'il d'états de Néel ?

   Comme le montre le schéma, le premier terme de l'hamiltonien vas avoir tendance à forcé l'anti-alignement des spins, alors, à température nulle, l'intégralité du réseau sera anti-aligné. On peut alors désigné deux sous-réseaux, l'un représentant le spin $\uparrow$ et l'autre le spin $\downarrow$. Il y a autant d'états de Néel que d'états de spins distincts. Dans notre cas il y a deux états : $+1$ et -1, alors il y a deux états de Néel.

3. Donner les expressions de l'aimantation et de l'énergie moyennes des états de Néel ?

4. Toujours à température nulle, quel est qualitativement l'effet d'un champ magnétique h positif ? En comparant l'énergie d'un état de Néel sous champ magnétique et celle d'un état ferromagnétique (où tous les spins sont orientés dans la même direction), en déduire la valeur critique h_c $(T = 0)$ du champ qui permet de passer de la phase antiferromagnétique à la phase ferromagnétique.

   Le champ h positif vas alors tenté de forcé les spins négatif à s'aligné avec lui, et ainsi devenir positif.

2.2 Approximation de champ moyen

On appelle $m_A = \langle s_i \rangle$ ($i \in A$) l'aimantation moyenne des spins du sous-réseau A et $m_B = \langle s_i \rangle$ ($i \in B$) l'aimantation moyenne des spins du sous-réseau B.

1. Justifier que $s_i s_j \simeq s_i m_B + s_j m_A - m_A m_B$ ($i \in A$, $j \in B$) dans l'approximation de champ moyen.

$$s_i = \langle s_i \rangle + \delta s_i = m_A + \delta s_i \qquad\qquad s_j = \langle s_j \rangle + \delta s_j = m_B + \delta s_j$$

Alors,

$$\begin{aligned} s_i s_j &= (m_A + \delta s_i)(m_B + \delta s_j) \\ &= m_A m_B + m_A \delta s_j + m_B \delta s_i + \delta s_i \delta s_j \\ &= m_A m_B + m_A(s_j - m_B) + m_B(s_i - m_A) + \delta s_i \delta s_j \\ &\approx m_A m_B - m_A m_B + m_A s_j - m_A m_B + m_B s_i \\ &= s_i m_B + s_j m_A - m_A m_B \end{aligned}$$

Dans l'approximation de champ moyen, on néglige les correlation entre spins, c'est pourquoi on peut dire que $\delta s_i \delta s_j \approx 0$.

2. En déduire que l'on peut mettre le hamiltonien (1) sous la forme

$$\mathcal{H} = (zJ_{\mathrm{AF}} m_B - h) \sum_{i \in A} s_i + (zJ_{\mathrm{AF}} m_A - h) \sum_{i \in B} s_i - \frac{1}{2} N z J_{\mathrm{AF}} m_A m_B.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= J_{\mathrm{AF}} \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_{i=1}^{N} s_i \\ &\approx J_{\mathrm{AF}} \sum_{\langle i,j \rangle} (s_i m_B + s_j m_A - m_A m_B) - h \sum_{i=1}^{N} s_i \\ &= -J_{\mathrm{AF}} m_A m_B \underbrace{\sum_{\langle i,j \rangle} (1)}_{=Nz/2} + J_{\mathrm{AF}} m_B \underbrace{\sum_{\langle i,j \rangle} s_i}_{=z\sum_{i \in A} s_i} + J_{\mathrm{AF}} m_A \underbrace{\sum_{\langle i,j \rangle} s_j}_{=z\sum_{j \in B} s_j} - h \sum_{i \in A} s_i - h \sum_{i \in B} s_i \\ &= (zJ_{\mathrm{AF}} m_B - h) \sum_{i \in A} s_i + (zJ_{\mathrm{AF}} m_A - h) \sum_{i \in B} s_i - \frac{1}{2} N z J_{\mathrm{AF}} m_A m_B \\ &= -h_{\mathrm{BA}} \sum_{i \in A} s_i - h_{\mathrm{AB}} \sum_{i \in B} s_i - \frac{1}{2} N z J_{\mathrm{AF}} m_A m_B \end{aligned}$$

3. En déduire que m_A et m_B vérifient le système d'équations auto-cohérentes suivant :

$$m_A = \tanh(\beta[h - \lambda m_B]),$$
$$m_B = \tanh(\beta[h - \lambda m_A]).$$

où l'on donnera l'expression de la constante λ. Que néglige-t-on en écrivant ces deux équations ?

On doit calculer la fonction de partition Z pour calculer l'énergie libre F pour obtenir ce système d'équations,

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{s_0} \cdots \sum_{s_N} e^{-\beta \mathcal{H}} \\
&= \sum_{\{s_k\}} e^{\beta[h_{\mathrm{BA}} \sum_{i\in A} s_i + h_{\mathrm{AB}} \sum_{i\in B} s_i + \frac{1}{2} N z J_{\mathrm{AF}} m_A m_B]} \\
&= e^{\frac{\beta}{2} N z J_{\mathrm{AF}} m_A m_B} \sum_{\{s_k\}} \left[\prod_{i\in A} e^{\beta h_{\mathrm{BA}} s_i}\right] \left[\prod_{i\in B} e^{\beta h_{\mathrm{AB}} s_i}\right] \\
&= e^{\frac{\beta}{2} N z J_{\mathrm{AF}} m_A m_B} \left\{\prod_{i\in A} \left[\sum_{s_i=\pm 1} e^{\beta h_{\mathrm{BA}} s_i}\right]\right\} \left\{\prod_{i\in B} \left[\sum_{s_i=\pm 1} e^{\beta h_{\mathrm{AB}} s_i}\right]\right\} \\
&= e^{\frac{\beta}{2} N z J_{\mathrm{AF}} m_A m_B} 2^N \left[\cosh(\beta h_{\mathrm{BA}})\right)^{N_A} \left[\cosh(\beta h_{\mathrm{AB}})\right)^{N_B} \qquad N = N_A + N_B
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
F &= -k_B T \ln Z \\
&= -N z J_{\mathrm{AF}} m_A m_B - N_A k_B T \cosh(\beta h_{\mathrm{BA}}) - N_B k_B T \cosh(\beta h_{\mathrm{AB}})
\end{aligned}$$

On peut alors définir m_A et m_B,

$$\begin{aligned}
m_A &= -\frac{1}{N_A} \frac{\partial F}{\partial h_{\mathrm{BA}}} \frac{\partial h_{\mathrm{BA}}}{\partial h} \\
&= -\frac{1}{N_A} \frac{\partial F}{\partial h_{\mathrm{BA}}}
\end{aligned} \qquad
\begin{aligned}
m_B &= -\frac{1}{N_B} \frac{\partial F}{\partial h_{\mathrm{AB}}} \frac{\partial h_{\mathrm{AB}}}{\partial h} \\
&= -\frac{1}{N_B} \frac{\partial F}{\partial h_{\mathrm{AB}}}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{cases}
m_A = k_B T \dfrac{\partial}{\partial h_{\mathrm{BA}}} \cosh(\beta h_{\mathrm{BA}}) = \tanh(\beta h_{\mathrm{BA}}) = \tanh(\beta[h - z J_{\mathrm{AF}} m_B]) \\
m_B = k_B T \dfrac{\partial}{\partial h_{\mathrm{AB}}} \cosh(\beta h_{\mathrm{AB}}) = \tanh(\beta h_{\mathrm{BA}}) = \tanh(\beta[h - z J_{\mathrm{AF}} m_A])
\end{cases}$$

On obtient bien,

$$\begin{cases}
m_A = \tanh(\beta[h - \lambda m_B]), \\
m_B = \tanh(\beta[h - \lambda m_A]).
\end{cases}$$

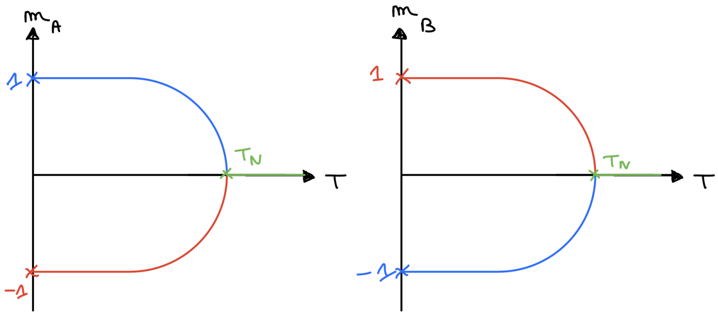
avec $\lambda = z J_{\mathrm{AF}}$.

4. On se place dans un premier temps à champ magnétique nul ($h = 0$).
   a. En supposant que $m_A = -m_B$, montrer qu'il existe une transition de phase pour une température $T_{\rm N}$ (appelée température de Néel) dont on donnera l'expression, entre une phase où $m_A = -m_B = 0$ et une phase où $m_A(T) = -m_B(T) = m_0(T)$. Donner l'allure de $m_A(T)$ en fonction de la température.

   Si $h = 0$, on obtient alors

$$\begin{cases} m_A = \tanh(-\beta z J_{\rm AF} m_B), \\ m_B = \tanh(-\beta z J_{\rm AF} m_A). \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m_A = \tanh(\beta z J_{\rm AF} m_A), \\ m_B = \tanh(\beta z J_{\rm AF} m_B). \end{cases}$$

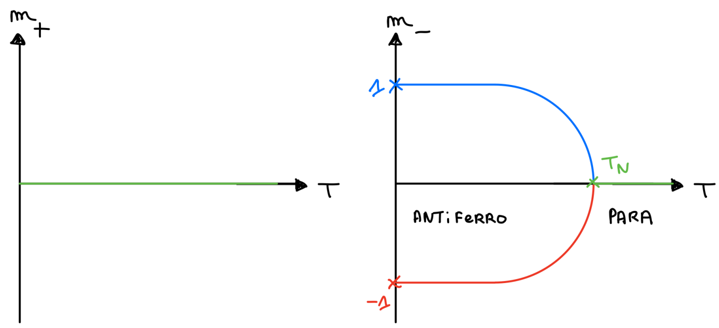
   C'est-à-dire que ce sont les mêmes solutions,



   On peut alors posé

$$k_B T_N = z J_{\rm AF}$$

   b. Tracer l'allule de $m_+ = (m_A + m_B)/2$ et de $m_- = (m_A - m_B)/2$. Quelle grandeur est le paramètre d'ordre de la transition antiferromagnétique-paramagnétique ? Que trouve-t'on si l'on mesure l'aimantation moyenne de l'échantillon ?



   m_- est alors le paramètre d'ordre de la transition antiferromagnétique-paramagnétique. L'aimantation moyenne de l'échantillon, correspondant donc à m_+ est toujours nulle.

5. On cherche maintenant à caractériser l'effet du champ magnétique sur m_A et m_B en calculant la susceptibilité magnétique du cristal définie par $\chi = N \partial m_+ / \partial h$ ($h = 0$). Justifier cette définition.

a. On se place tout d'abord à $T > T_{\mathrm{N}}$ et l'on suppose que le champ magnétique est faible (devant quoi ?). Linéariser les équations auto-cohérentes et montrer que

$$\chi(T) = \frac{2C}{T + T_{\mathrm{N}}},$$

où C est une constante que l'on déterminera.

$$\begin{cases} m_A = \tanh(\beta[h - zJ_{\mathrm{AF}} m_B]) \approx \dfrac{h}{k_B T} - \dfrac{T_N}{T} m_B, \\ m_B = \tanh(\beta[h - zJ_{\mathrm{AF}} m_A]) \approx \dfrac{h}{k_B T} - \dfrac{T_N}{T} m_A. \end{cases}$$

Alors,

$$m_+ = \frac{1}{2}(m_A + m_B) = \frac{h}{k_B T} - \frac{T_N}{2T}(m_A + m_B) = \frac{h}{k_B T} - \frac{T_N}{T} m_+$$

Alors,

$$m_+ \left(1 + \frac{T_N}{T}\right) = \frac{h}{k_B T}$$

Alors,

$$m_+ = \frac{h/k_B}{T + T_N}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \chi &= N \frac{\partial m_+}{\partial h}\bigg|_{h=0} \\ &= \frac{N/k_B}{T + T_N} \end{aligned}$$

Alors,

$$C = \frac{N}{2k_B}$$

b. On se place maintenant à $T < T_{\mathrm{N}}$. On suppose que le champ magnétique h est faible et on écrit les aimantations sur les sites A et B comme $m_A = m_0 + \Delta m_A$ et $m_B = -m_0 + \Delta m_B$, avec $\Delta m_A \ll m_0$ et $\Delta m_B \ll m_0$. En faisant un développement limité des équations auto-cohérentes, montrer que la susceptibilité se met sous la forme [2]

$$\chi(T) = \frac{N}{k_B} \frac{1}{T \cosh^2\left(\frac{T_{\mathrm{N}}}{T} m_0(T)\right) + T_{\mathrm{N}}}.$$

2. On rappelle que $\tanh(a + x) \simeq \tanh a + x/\cosh^2 a$ pour $x \ll 1$.

Montrer que pour $T > T_{\mathrm{N}}$ on retrouve le résultat précédent. Comment se comporte χ à basse température ? Donner l'allure de la courbe $\chi(T)$ et comparer-là à celle d'un ferromagnétique.

$$m_A = \tanh\left(\frac{h}{k_BT} - \frac{T_N}{T}m_B\right) = \tanh\left(\frac{h}{k_BT} - \frac{T_N}{T}\Delta m_B + \frac{T_N}{T}m_0\right)$$

Alors,

$$m_0 + \Delta m_A \simeq \tanh\left(\frac{T_N}{T}m_0\right) + \frac{\frac{h}{k_BT} - \frac{T_N}{T}\Delta m_B}{\cosh^2\left(\frac{T_N}{T}m_0\right)}$$

Et,

$$m_B = \tanh\left(\frac{h}{k_BT} - \frac{T_N}{T}m_A\right) = \tanh\left(\frac{h}{k_BT} - \frac{T_N}{T}\Delta m_A - \frac{T_N}{T}m_0\right)$$

Alors,

$$-m_0 + \Delta m_B \simeq -\tanh\left(\frac{T_N}{T}m_0\right) + \frac{\frac{h}{k_BT} - \frac{T_N}{T}\Delta m_A}{\cosh^2\left(\frac{T_N}{T}m_0\right)}$$

Alors,

$$m_A + m_B = \frac{\frac{2h}{k_BT} - \left(\frac{T_N}{T}\Delta m_A + \Delta m_B\right)}{\cosh^2\left(\frac{T_N}{T}m_0\right)} = \Delta m_A + \Delta m_B$$

$$(\Delta m_A + \Delta m_B)\left\{1 + \frac{T_N}{T}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{T_N}{T}m_0\right)}\right\} = \frac{\frac{2h}{k_BT}}{\cosh^2\left(\frac{T_N}{T}m_0\right)}$$

Et donc,

$$\Delta m_A + \Delta m_B \equiv 2m_+ = \frac{2h}{k_BT\cosh^2\left(\frac{T_N}{T}m_0\right)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{T_N}{T}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{T_N}{T}m_0\right)}} = \frac{2h}{k_B}\left\{\frac{1}{T_N + T\cosh^2\left(\frac{T_N}{T}m_0\right)}\right\}$$

C'est-à-dire que,

$$m_+ = \frac{h}{k_B}\left\{\frac{1}{T_N + T\cosh^2\left(\frac{T_N}{T}m_0\right)}\right\}$$

Alors,

$$\chi = N\frac{\partial m_+}{\partial h}\bigg|_{h=0} = \frac{N}{k_B}\left\{\frac{1}{T_N + T\cosh^2\left(\frac{T_N}{T}m_0\right)}\right\}$$

6. On vient de voir que la mesure de la susceptibilité permet de mettre en évidence une phase antiferromagnétique. Les techniques de differation de neutrons, qui sont des particules possédant un spin et donc sensible à l'aimantation des atomes, permettent d'avoir une sonde sensible à l'aimantation locale.

   La figure 1 de la page suivante montre les spectres de diffraction des neutrons de l'oxyde de manganèse (MnO), un cristal de structure cubique, qui est un matériau antiferromagnétique de température de Néel $T_N \simeq 120$ K. Commenter ces courbes.