Université de Strasbourg

TD2 - Physique subatomique

Eric Chabert

Transcrit par

Pierre Guichard

L3 Semestre 6 2021

Rappels

Désintégration β^-

$$\text{neutron} \rightarrow \text{proton} + e^- + \bar{\nu}_e$$

C'est à dire que :

$${}^A_Z\mathrm{X} \rightarrow {}^A_{Z+1}\,\mathrm{Y} + e^- + \bar{\nu}_e$$

Dans la suite, la masse du neutrino sera négligé, alors par conservation de l'énergie,

$$M_\mathrm{X}c^2 = \underbrace{M_\mathrm{Y}c^2 + m_ec^2}_{\text{énergie de masse}} + \underbrace{T_{\beta^-} + T_{\bar{\nu}_e} + T_\mathrm{Y}}_{\text{énergie cinétique}}$$

Dans la suite, on peut négligé T_Y, car vu que la masse du noyau Y est bien plus grande que celle d'un électron, cette énergie cinétique sera bien plus faible, et alors négligeable.

Alors, on peut définir la chaleur de réaction Q,

$$Q_{\beta^-} = M_\mathrm{X}c^2 - (M_\mathrm{Y}c^2 + m_ec^2) = T_{\beta^-} + T_{\bar{\nu}_e} \equiv T_\mathrm{max}$$

Notre réaction est possible si $Q_{\beta^-} \geq 0$, et devient cinématiquement impossible si $Q_{\beta^-} < 0$.

On peut alors utilisé le lien entre la masse du noyau et des atomes,

$$\mathcal{M}_\mathrm{X}c^2 = M_\mathrm{X}c^2 + Zm_ec^2 \qquad \mathcal{M}_\mathrm{Y}c^2 = M_\mathrm{Y}c^2 + (Z+1)m_ec^2$$

Alors, on peut écrire autrement la chaleur de réaction Q,

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= M_\mathrm{X}c^2 - (M_\mathrm{Y}c^2 + m_ec^2) \\ &= \mathcal{M}_\mathrm{X}c^2 - \mathcal{M}_\mathrm{Y}c^2 \\ &= \Delta(A,Z) - \Delta(A,Z+1) \end{aligned}$$

où les Δ sont les excès de masse.

Alors, la condition d'instabilité est :

$$Q_{\beta^-} > 0 \longrightarrow (\Delta_\mathrm{X} - \Delta_\mathrm{Y}) > 0$$

Désintégration β^+

$$\text{proton} \rightarrow \text{neutron} + e^+ + \nu_e$$

C'est à dire que :

$${}^A_Z\mathrm{X} \rightarrow {}^A_{Z-1}\,\mathrm{Y} + e^+ + \nu_e$$

De façon similaire au β^-,

$$M_\mathrm{X}c^2 = M_\mathrm{Y}c^2 + m_{\beta^+}c^2 + T_{\max}$$

Alors, la chaleur de réaction,

$$Q = M_\mathrm{X}c^2 - M_\mathrm{Y}c^2 - m_e c^2$$

Alors,

$$\begin{aligned} Q_{\beta^+} &= \mathcal{M}_\mathrm{X} - \mathcal{M}_\mathrm{Y} - 2m_e c^2 \\ &= \Delta(A, Z) - \Delta(A, Z-1) - 2m_e c^2 \end{aligned}$$

Alors, la condition d'instabilité est :

$$Q_{\beta^+} > 0 \longrightarrow (\Delta_\mathrm{X} - \Delta_\mathrm{Y}) > 2m_e c^2$$

> **Remarque :** $m_{\beta^+} = m_{\beta^-} = m_e$.

Désintégration α

$${}^A_Z\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\,\mathrm{Y} + {}^4_2\,\mathrm{He}$$

Alors, la relation de conservation de l'énergie devient :

$$M_\mathrm{X}c^2 = M_\mathrm{Y}c^2 + m_\alpha c^2 + T_\alpha + T_\mathrm{Y}$$

Cette fois ci, T_Y devient non négligeable.

Alors, la chaleur de réaction Q est :

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= M_\mathrm{X}c^2 - M_\mathrm{Y}c^2 - m_\alpha c^2 \\ &= \Delta(A, Z) - \Delta(A-4, Z-2) - \Delta\left({}^4_2\mathrm{He}\right) \end{aligned}$$

Exercice 1

On étudie une pastille mince contenant du Polonium-210.

1) Connaissant les excès de masses indiqués dans le tableau suivant, déterminer si le Polonium $^{210}_{84}$Po peut être radioactif α, β_+ ou β_-.

Noyau	Excès de masse Δ [MeV]	$T_{1/2}$
$^{210}_{85}$At	-11.995	8.1 heures
$^{210}_{84}$Po	-15.977	138.378 jours
$^{210}_{83}$Bi	-14.815	5.01 jours
$^{210}_{82}$Pb	-14.752	22.3 ans
$^{206}_{82}$Pb	-23.809	Stable
$^{206}_{81}$Tl	-22.278	4.199 minutes
$^{4}_{2}$He	2.4249	stable

Considérons,

- Réaction β^-

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{210}_{85}\text{At} + \beta^- + \bar{\nu}_e$$

Alors on calcul la chaleur Q de cette réaction,

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= \Delta(^{210}_{84}\text{Po}) - \Delta(^{210}_{85}\text{At}) \\ &= -15.977 - (-11.995) \\ &= -3.982 \text{ MeV} < 0 \end{aligned}$$

Alors cette réaction est impossible.

- Réaction β^+

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{210}_{83}\text{Bi} + \beta^+ + \nu_e$$

Alors on calcul la chaleur Q de cette réaction,

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= \Delta(^{210}_{84}\text{Po}) - \Delta(^{210}_{83}\text{Bi}) - 2m_e c^2 \\ &= -15.977 - (-14.815) - 1.022 \\ &= -2.184 \text{ MeV} < 0 \end{aligned}$$

Alors cette réaction est impossible.

- Réaction α

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{206}_{82}\text{Pb} + \alpha$$

Alors on calcul la chaleur Q de cette réaction,

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= \Delta({}^{210}_{84}\text{Po}) - \Delta({}^{206}_{82}\text{Pb}) - \Delta({}^{4}_{2}\text{He}) \\ &= -15.977 + 23.809 - 2.4249 \\ &= 5.4071 \text{ MeV} > 0 \end{aligned}$$

Alors cette réaction est énergétiquement possible.

Alors, le polonium ${}^{210}_{84}\text{Po}$ peut être radioactif α.

2) En supposant que la décroissance radioactive de ${}^{210}_{84}\text{Po}$ donne naissance à un noyau fils dans son état fondamental, déterminer l'énergie libérée par la décroissance radioactive d'un atome de ${}^{210}_{84}\text{Po}$. Sous quelle forme est libérée cette énergie ?

$$Q_\alpha = M_\text{X} - M_\text{Y} - M_\alpha = T_\text{Y} + T_\alpha$$

Alors, cette énergie est libérée sous forme d'une énergie cinétique.

3) Quelle est l'énergie cinétique emportée par le rayonnement produit (α, β_+ ou β_-) ?

Il y a conservation de l'impulsion, c'est à dire que :

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f = \vec{0}$$

Alors,

$$\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\text{Y} = 0 \qquad\qquad ||\vec{p}_\alpha|| = ||\vec{p}_\text{Y}||$$

On vas se placer dans une approche non-relativiste,

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad\longrightarrow\quad T_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} \qquad T_\text{Y} = \frac{p_\text{Y}^2}{2m_\text{Y}}$$

Alors,

$$T_\text{Y} = \frac{2m_\alpha}{2m_\text{Y}} T_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_\text{Y}} T_\alpha$$

Alors la chaleur de réaction,

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= T_\alpha + T_\text{Y} \\ &= T_\alpha \left[1 + \frac{m_\alpha}{m_\text{Y}}\right] \\ &= T_\alpha \left[\frac{m_\text{Y} + m_\alpha}{m_\text{Y}}\right] \end{aligned}$$

Alors,

$$T_\alpha = Q_\alpha \left[\frac{m_\mathrm{Y}}{m_\mathrm{Y} + m_\alpha} \right]$$

Alors,

$$\begin{aligned} M(^{206}\mathrm{Pb}) &= \mathcal{M}(^{206}\mathrm{Pb}) - 82 m_e \\ &= \Delta(^{206}\mathrm{Pb}) + 206u - 82 m_e \\ &= -23.809 + 206 \times 931.49 - 82 \times 0.511 \\ &= 191.82 \text{ GeV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(^{4}\mathrm{He}) &= \mathcal{M}(^{4}\mathrm{He}) - 2 m_e \\ &= \Delta(^{4}\mathrm{He}) + 4u - 2 m_e \\ &= 2.4249 + 4 \times 931.49 - 2 \times 0.511 \\ &= 3.727 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Alors,

$$T_\alpha = 5.4071 \times \frac{191.82}{191.82 + 3.727} = 5.36 \text{ MeV}$$

4) Quelle est la vitesse correspondante ?

$$\frac{v_\alpha}{c} = \sqrt{\frac{2T_\alpha}{M_\alpha c^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 5.36}{3727}} = 0.05 \ll 1$$

Ce qui justifie l'approche non-relativiste.

5) L'analyse chimique de la pastille montre qu'elle contient à $t = 0$, entre autre, 10 g de $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ et 10 g $^{210}_{84}\mathrm{Po}$. A l'aide du tableau des excès de masse, déterminer si le $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ peut être radioactif α, β_+ ou β_-.

- β^-

$$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow ^{210}_{84}\mathrm{Po} + \beta^- + \bar{\nu}_e$$

Alors,

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= \Delta(^{210}_{83}\mathrm{Bi}) - \Delta(^{210}_{84}\mathrm{Po}) \\ &= -14.815 + 15.977 \\ &= 1.162 > 0 \end{aligned}$$

Alors cette réaction est possible.

- β^+

$$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow ^{210}_{82}\mathrm{Pb} + \beta^+ + \nu_e$$

Alors,

$$\begin{aligned} Q_{\beta^+} &= \Delta(^{210}_{83}\mathrm{Bi}) - \Delta(^{210}_{82}\mathrm{Pb}) - 2m_e c^2 \\ &= -14.815 + 14.752 - 1.022 \\ &= 1.085 \text{ MeV} < 0 \end{aligned}$$

Alors cette réaction est impossible.

- α

$$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow ^{206}_{81}\mathrm{Te} + ^4_2\mathrm{He}$$

Alors,

$$\begin{aligned} Q_{\alpha} &= \Delta(^{210}_{83}\mathrm{Bi}) - \Delta(^{206}_{81}\mathrm{Te}) - \Delta(^4_2\mathrm{He}) \\ &= -14.815 + 22.278 - 2.4249 \\ &= 5.0381 \text{ MeV} > 0 \end{aligned}$$

Alors cette réaction est possible.

Alors, $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ peut être émetteur α et β^-.

6) Quel lien peut-il y avoir entre la présence de $^{210}_{84}\mathrm{Po}$ et de $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ dans la pastille ?

Le $^{210}\mathrm{Po}$ est produit lors de la désintégration β^- du $^{210}\mathrm{Bi}$.

Exercice 2

Soit un échantillon d'une source radioactive. La probabilité par unité du temps pour qu'un noyau donné se désintègre est λ. On donne :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

Avec : N_0 le nombre des noyaux à l'instant initial $t = t_0$, $N(t)$ le nombre de noyaux à un temps t, $\mathrm{d}N$ le nombre des noyaux qui se sont désintégrés après le temps $\mathrm{d}t$,

1) Résoudre l'équation différentielle qui régie la variation de N en fonction du temps.

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} - \lambda \mathrm{d}T \longrightarrow N = \exp(-\lambda t + C)$$

Si on note $K = \exp(c)$, alors :

$$N = K \exp(-\lambda t)$$

à $t = 0$, $N(t = 0) = N_0$, alors :

$$\boxed{N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)}$$

2) La période T de décroissance radioactive se définissant comme l'intervalle de temps au cours duquel statistiquement la moitié des noyaux subiront une désintégration, exprimer T en fonction de la constante radioactive λ pour n'importe quel élément radioactif.

$$N(t = T) = \frac{N_0}{2} = N_0 \exp(-\lambda T)$$

Alors,

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

3) Après combien de période le nombre des noyaux radioactifs se réduit au dixième de N_0 ?

$$N(t') = \frac{N_0}{10} = N_0 \exp(-\lambda t')$$

Alors,

$$t' = \frac{\ln 10}{\lambda}$$

Alors,

$$t' = \left(\frac{ln10}{\ln 2}\right) T$$

A.N. :
Souvent dans une acquisition de données effectué par un détecteur quelconque, les données sont rangés dans des spectres telle que l'unité de l'axe des abscisses est arbitraire et celle de l'axe des ordonnés est le nombre de coups. L'étalonnage d'un détecteur consiste à exposer ce dernier à une source radioactive dont le spectre d'énergie est connu, afin d'associer aux unités arbitraires des abscisses des unités de mesure physiques.

4) On se propose d'étalonner un détecteur de rayonnement γ par une source de Cobalt-60

^{60}Co (émissions γ)	
Période	5,27 ans
1ère Emission γ	1332 keV
2ème Emission γ	1173 keV

La fiche fiche correspondante à cette source indique une activité $A_0 = 10.88$ μCi en 1984. Étant donné que l'activité de la chambre où est effectué l'étalonnage est de l'ordre de 1 μCi, calculer l'activité résiduelle de l'échantillon et conclure sur la possibilité de l'étalonnage. On rappelle que 1 Ci équivaut à l'activité de 1 g de ^{226}Ra, soit 3.7×10^{10} Bq.

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 \exp(-\lambda t) = A_0 \exp(-\lambda t)$$

$$A_0 = A(t = 1984) = 10.88\ \mu\text{Ci} = 10.88 \times 3.8 \times 10^{10} \times 10^{-6} = 402500\ \text{Bq}$$

$$A(t = 2021) = A_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T} t\right) = 402500 \exp\left(-\frac{\ln 2}{5.27} 37\right) = 3100\ \text{Bq}$$

Et on calcul :

$$A(\text{chambre/bruit/background}) = 1\ \mu\text{Ci} = 3.7 \times 10^{10} \times 10^{-6} = 3.7 \times 10^{4}\ \text{Bq}$$

Le bruit causé par le rayonnement est plus important que l'activité de l'échantillon, donc c'est impossible de le distinguer : il n'y a alors pas d'étalonnage possible.

Exercice 3

Le potassium naturel est un mélange d'isotopes selon les proportions suivantes :

$$\begin{aligned}
{}^{39}\mathrm{K} &: \text{ stable avec } I = 93\% \\
{}^{40}\mathrm{K} &: \text{ radioactive avec } I = 0.012\%, \quad T = 1.26 \times 10^{9} \text{ ans} \\
{}^{41}\mathrm{K} &: \text{ stable avec } I = 6.988\%
\end{aligned}$$

Calculer l'activité du sang en Bq/L sachant que sa teneur en potassium est égale à 200 mg/L
La masse molaire du potassium est $M = 39,14$ g.mol^{-1}.

$$A_{^{40}\mathrm{K}} = \lambda N_{^{40}\mathrm{K}}$$

Alors, dans 1L,

$$\begin{aligned}
N_{^{40}\mathrm{K}} &= \frac{m_{^{40}\mathrm{K}}}{M_{^{40}\mathrm{K}}} \times \mathcal{N}_A \times I_{^{40}\mathrm{K}} \\
&= \frac{200 \times 10^{-3}}{39.14} \times 6.022 \times 10^{23} \times \frac{0.012}{100} \\
&= 3.62 \times 10^{17} \text{ noyaux}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
A_{^{40}\mathrm{K}} &= \frac{ln2}{1.26 \times 10^{9} \times 365 \times 24 \times 3600} \times 3.62 \times 10^{17} \\
&= 6.42 \text{ Bq}
\end{aligned}$$

En général, un adulte à 5L de sang, alors

$$A(\text{sang}) \approx 40 \text{ Bq}$$

Et l'activité dans le corps humain adulte est en général de 8000 Bq, dont 4000 qui proviennent du ^{40}K, alors on remarque que la proportion dans la contribution du sang est faible dans cette proportion.

Exercice 4

Le radioisotope ^{131}I est caractérisé par une période physique égale à 8.1 jours et une période biologique dont la valeur est 138 jours.

1) Calculer les constantes radioactives propres à ces deux périodes.

$$\lambda_{\text{physique}} = \frac{\ln 2}{8.1} = 0.0851\ \text{j}^{-1} \qquad \lambda_{\text{biologique}} = \frac{\ln 2}{138} = 0.005\ \text{j}^{-1}$$

2) Calculer la période effective.

$$\frac{1}{T_{\text{effective}}} = \frac{1}{T_{\text{biologique}}} + \frac{1}{T_{\text{physique}}} = 0.1307\ \text{j}^{-1}$$

Alors,

$$T_{\text{effective}} = 7.65\ \text{jours}$$

3) En médecine nucléaire, ^{131}I sert à l'étude du fonctionnement de la thyroïde. Si on injecte à un patient une activité initiale de 1 MBq, au bout de combien de temps cette activité sera réduite à 1 kBq.

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t)$$

$$A_0 = 1\ \text{MBq} \qquad A(t) = 1\ \text{kBq}$$

Alors,

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t)$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right) \\ &= -\frac{T_{\text{effective}}}{\ln 2} \ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right) \\ &= -\frac{7.65}{\ln 2} \left(\frac{10^3}{10^6}\right) \\ &= 76.2\ \text{jours} \end{aligned}$$

Exercice 5

La datation au carbone 14 est particulièrement adaptée aux recherches archéologiques puisque sa période $T = 5530 \pm 40$ ans correspond à l'ordre de grandeur de la date des évènements que l'on cherche à situer dans le temps. La concentration de carbone 14 radioactif 14 C^* à l'état de gaz carbonique $\mathrm{C}^*\mathrm{O}_2$ dans l'atmosphère est constante. Sa production résulte des rayons cosmiques qui forment des neutrons qui vont eux-mêmes interagir avec l'azote de l'air. Un équilibre s'établit entre les êtres vivants et le gaz carbonique, si bien que l'activité spécifique (nombre de désintégration par gramme de carbone par minute) est la même dans les organismes vivants et l'atmosphère. Sa valeur, 15.3 désintégrations β par gramme et par minute, est uniforme à la surface de la Terre. Après la mort, les échanges entre l'atmosphère et les organismes vivants cessent. La quantité de carbone 14 diminue alors lentement.

1) Quelle est la réaction qui produit le carbone 14 ?

$$n +_7^{14}\mathrm{N} \rightarrow_6^{14}\mathrm{N} + p$$

2) Quelle est la réaction de désintégration ?

$${}_6^{14}\mathrm{C} \rightarrow_7^{14}\mathrm{N} + \beta^- + \bar{\nu}_e$$

3) On cherche à dater une poutre en cyprès se trouvant dans la tombe d'un pharaon. L'activité spécifique de cette poudre est de 8 ± 0.5 désintégrations par gramme de carbone par minute. Calculer l'âge de la poutre ainsi que l'incertitude correspondante.

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t)$$

Alors,

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$$

Alors,

$$t = \frac{5530}{\ln 2} \ln\left(\frac{15.3}{8}\right) = 5173 \text{ ans}$$

Et on sait que :

$$\sigma_t^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 \times \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2 \times \sigma_T^2 + \frac{\partial f}{\partial A}\frac{\partial f}{\partial T} \times \sigma_{AT}^2$$

Alors,

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \sqrt{\left(\frac{1}{\ln 2}\left(\ln \frac{A}{A_0}\right)\right)^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{T}{\ln 2}\frac{1}{A}\right)^2 \sigma_A^2} \\ &= 263 \text{ ans}\end{aligned}$$

On remarque que l'incertitude est dominé par σ_A.

Exercice 6

Soit la filiation à 3 corps :

$$ {}^{A_1}_{Z_1}X_1 \xrightarrow{\lambda_1} {}^{A_2}_{Z_2}X_2 \xrightarrow{\lambda_2} {}^{A_3}_{Z_3}X_3 \ \textbf{(stable)} $$

1) Donner, pour chacune des trois espèces, la variation du nombre de noyaux en fonction du temps.

$$N_1(t) = N_0 \exp(-\lambda_1 t)$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)\right]$$

$$N_3(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0 \left[\frac{1 - \exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1} - \frac{1 - \exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2}\right]$$

2) Donner l'activité des trois espèces.

$$A_1(t) = \lambda_1 N_1(t) = \lambda_1 N_0 \exp(-\lambda_1 t)$$

$$A_2(t) = \lambda_2 N_2(t) = \frac{\lambda_2 A_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)\right]$$

$$A_3(t) = 0$$

Car c'est un noyau stable.

3) Que se passe-t-il quand $\lambda_1 < \lambda_2$? Comment appelle-t-on cet état ? Donner la valeur de l'activité maximale du descendant (2). Enfin, tracer l'activité en fonction du temps dans ce cas.

Si $\lambda_1 < \lambda_2$ alors $T_1 > T_2$ le noyau fils se désintègre plus rapidement alors :

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_1} > 0 \longrightarrow \exp(-\lambda_2 t) \ll \exp(-\lambda_1 t)$$

Le terme en $\exp(-\lambda_2 t)$ négligeable,

$$\begin{aligned} A_2(t) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0 \exp(-\lambda_1 t) \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_1 \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} > 1$$

On dit qu'ils sont en *équilibre radioactif*, on parle de **régime séculaire**.

L'activité est maximal quand :

$$\frac{\mathrm{d}A_2(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Alors,

$$\frac{\mathrm{d}A_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0 \left[-\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t)\right] = 0$$

Alors,

$$\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) = \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t)$$

Ce qui est équivalent,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \exp((\lambda_1 - \lambda_2)t)$$

Alors,

$$\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = (\lambda_1 - \lambda_2)t$$

Alors :

$$t_m = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$$

$$\begin{aligned} A_2(t_m) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0 \exp(-\lambda_1 t_m) \left(1 - \exp((\lambda_1 - \lambda_2)t_m)\right) \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0 \exp(-\lambda_1 t_m) \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}\right) \\ &= A_0 \exp(-\lambda_1 t_m) \\ &= A_1(t_m) \end{aligned}$$

A_2 est maximal à t_m et $A_2 = A_1$ à ce même moment.

4) Même question si $\lambda_1 > \lambda_2$

Si $\lambda_1 > \lambda_2$ alors $T_1 < T_2$,

$$A_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0(\exp(-\lambda_2 t) - \exp(-\lambda_1 t))$$

Si $\lambda_1 \gg \lambda_2$, alors

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda - 1} < 1$$

Pour $t \gg T_1$, alors

$$\exp(-\lambda_1 t) = 0$$

Alors,

$$A_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_0 \exp(-\lambda_2 t)$$

Exercice 7

Pour obtenir une source radioactive de ^{60}Co, on irradie pendant une durée Δt = 30 minutes, une masse M = 59 mg de cobalt naturel (^{59}Co) avec un flux de neutrons thermiques $\Phi = 1012$ neutrons cm^{-2}.s^{-1}. On forme ainsi par réaction (n, γ) le ^{60}Co , soit dans son état fondamental (^{60f}Co), émetteur β^-, de période T_f = 5.27 ans, avec une section efficace $\sigma_f = 2b$, soit dans un état excité métastable (^{60m}Co), avec une section efficace $\sigma_m = 58b$. Celui-ci se désexcite vers l'état fondamental avec une période T_m = 10 minutes.
On donne :
Le nombre de noyaux formé par irradiation est égale à

$$n_f = N\sigma\Phi t$$

avec N : Nombre des noyaux dans la cible, σ : section efficace de la réaction concernée, Φ : Flux des neutrons, t : le temps écoulé.

1) Quel sera le nombre de noyaux (^{60m}Co) à la fin de l'irradiation ?

$$\frac{\mathrm{d}N_m}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}N_m(t)}{\mathrm{d}t}}_{\text{produit}} - \underbrace{\lambda_m N_m(t)}_{\text{désintégré}}$$

Et on sait que :

$$N_m = N\sigma_f\Phi t \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}N_m}{\mathrm{d}t} = N\sigma_m\Phi$$

D'où,

$$\frac{\mathrm{d}N_m}{\mathrm{d}t} = N\sigma_m\Phi - \lambda_m N_m(t)$$

Ce qu'on peut réécrire

$$\frac{\mathrm{d}N_m}{\mathrm{d}t} + \lambda_m N_m(t) = N\sigma_m\Phi$$

On multiplie par $\exp(\lambda_m t)$ des deux côtés,

$$\exp(\lambda_m t)\frac{\mathrm{d}N_m}{\mathrm{d}t} + \exp(\lambda_m t)\lambda_m N_m(t) = \exp(\lambda_m t)N\sigma_m\Phi$$

Ce qu'on peut réécrire sous une différentielle totale :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(N_m \exp(\lambda_m t)\right) = \exp(\lambda_m t)N\sigma_m\Phi$$

Et en intégrant,

$$N_m \exp(\lambda_m t) = \frac{N\sigma_m\Phi}{\lambda_m}\exp(\lambda_m t) + C$$

Pour déterminer la constante C, on regarde les conditions initiale, on sait que à $t = 0$, on a $N_m(0) = 0$, alors :

$$C = -\frac{N\sigma_m\Phi}{\lambda_m}$$

N est le nombre de noyaux de la cible, ce nombre diminue très légèrement au cours du temps. Étant donné les temps d'irradiation et les sections efficace considéré ici, la variation peut-être considéré comme numériquement négligeable.

$$N = \frac{M}{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}_A = \frac{59 \times 10^{-3} \times 6.022 \times 10^{23}}{59} = 6.022 \times 10^{20} \text{ Noyaux}$$

Et on sait que

$$\sigma_m = 58 \text{ barn} = 58 \times 10{-}24 \text{ cm}^2$$

Alors,

$$\begin{aligned} N_m &= 6.022 \times 10^{20} \times 58 \times 10^{-24} \times 10^{12} \times \frac{10 \times 60}{\ln 2} \times \left[1 - \exp\left(-\frac{\ln 2}{10} \times 30\right)\right] \\ &= 2.6 \times 10^{13} \text{ Noyaux} \end{aligned}$$

à $t = \Delta t = 30$ minutes, on obtient que moins d'un millionième des noyaux ^{59}Co auront réagi au cours de $\Delta t = 30$ minutes. Alors, l'approximation $N =$constante est validée.

2) Quelle est l'activité β à la fin de l'irradiation ?

^{60f}Co est émetteur β^-,

$$A(\beta^-) = \lambda_f \times N(^{60f}\text{Co})$$

où

$$N(^{60f}\text{Co}) \to N_{\text{irradiation}}(^{60f}\text{Co}) \text{ et } N_{\text{désintégration}}(^{60f}\text{Co})$$

$$N_{\text{irradiation}}(^{60f}\text{Co}) = \frac{N\Phi\sigma_f}{\lambda_f}\left[1 - \exp(-\lambda_f t)\right]$$

Et si λ_t est petit, on peut faire un développement limité $\exp(x) \approx 1 + x$

$$N_{\text{irradiation}}(^{60f}\text{Co}) = N\Phi\sigma_f\Delta t$$

$$
\begin{aligned}
N_{\text{désintégration}}(^{60f}\text{Co}) &= \underbrace{N_M\left(^{60}\text{Co}, \Delta t\right)}_{\text{produit}} - \underbrace{N_m(\Delta t)}_{\text{ce qui reste}} \\
&= N\Phi\sigma_m\Delta t - \frac{7}{8}N\frac{\sigma_m\Phi}{\lambda_m} \\
&= N\Phi\sigma_m\left[\Delta t - \frac{7}{8m}\right]
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
A(\beta^-) &= \lambda_f N\Phi\left[\sigma_f\Delta t + \sigma_m\Delta t - \frac{7}{8}\frac{\sigma_m}{\lambda_m}\right] \\
&= \frac{N\Phi}{T_f}\left[\ln(2)(\sigma_f+\sigma_m)\Delta t - \frac{7}{8}\sigma_m T_m\right]
\end{aligned}
$$

En faisant l'application numérique on trouve :

$$
A(\beta^-) = 1.6\times 10^5 \text{ Bq} = 4.3\ \mu\text{Ci}
$$

3) Que devient-elle un jour après ? Un an après ?

Un jour après :

$$
N_{\text{irradiation}}(^{60f}\text{Co}) \text{ inchangé}
$$

$$
N_{\text{désintégration}}(^{60f}\text{Co}) \qquad\qquad t = 1 \text{ jour} \qquad T_m = 10 \text{ min}
$$

Alors, on peut se placé dans l'approximation $t \gg T_m$, alors pour tout les noyaux :

$$
^{60m}\text{Co} \rightarrow ^{60f}\text{Co}
$$

Alors,

$$
N_m(t = 1 \text{ jour}) \approx 0
$$

$$
\begin{aligned}
A(\beta^-) &= \frac{N\Phi}{T_f}\left[\ln 2(\sigma_f+\sigma_m)\Delta t\right] \\
&= 2.7\times 10^5 \text{ Bq} \\
&\approx 7.3\ \mu\text{Ci} \\
&\equiv A_0
\end{aligned}
$$

On remarque alors que :

$$
A(t = t_f) > A(t = 30 \text{ min})
$$

Alors,

$$
A(t = 1 \text{ an}) = A_0\exp(-\lambda_f t) = A_0\exp\left(-\frac{\ln 2}{5.27}\times 1\right) = 2.37\times 10^5 \text{ Bq} = 6.4\ \mu\text{Ci}
$$

Exercice 8

On enferme dans une ampoule de 0.3 mm^3 du radon ^{222}Rn, mesuré dans les conditions normales de température et de pression. Le gaz est monoatomique.

1) Calculer l'activité du ^{222}Rn en Bq et en Ci.
   On rappelle que le volume d'une molle dans les conditions normales de température et de pression, le volume d'une mole est 22.4 litres.
2) En supposant que le radon ^{222}Rn est en équilibre radioactif avec ces descendants, calculer en g la masse et l'activité en Bq du ^{210}Pb formé au bout de 2 mois.
   On donne la décroissance de la famille radioactive de ^{238}U.