Université de Strasbourg

TD3 - Physique subatomique

Eric Chabert

Transcrit par

Pierre Guichard

L3 Semestre 6 2021

Exercice 1 : cinématique de la diffusion élastique non relativiste

Une particule de masse m_1 et de vitesse $\vec{V}$, entre en collision avec une particule immobile de masse m_2. La collision est représentée sur la figure ci-dessous dans le système de laboratoire (SL) et du centre de masse (SCM).

1) En se servant de la composition des vitesses et du schéma ci-dessus, montrer la relation entre les angles θ_{SL} et θ'_{SCM}.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + \frac{m_1}{m_2}}$$

L'étoile $*$ indique le centre de masse et le prime après la collision,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_1^*$$

Et on sait que :

$$\vec{v}_2 = \vec{0}$$

Mais aussi que :

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_2^*$$

On obtient ainsi :

$$||\vec{v}_2^*|| = ||\vec{v}_{\mathrm{CM}}||$$

Alors, après la collision,

$$\vec{v}_1^{*'} = \vec{v}_1' - \vec{v}_{\mathrm{CM}} \tag{1}$$

On peut alors projeté l'équation (1) selon $\hat{x}$ et $\hat{y}$,

$$\begin{cases} v_1^{*'}\cos\theta' = v_1'\cos\theta - v_{\mathrm{CM}} & \text{selon } \hat{x} \\ v_1^{*'}\sin\theta' = v_1'\sin\theta & \text{selon } \hat{y} \end{cases}$$

Ce qu'on peut réécrire,

$$\begin{cases} v_1'\cos\theta = v_1^{*'}\cos\theta' + v_{\mathrm{CM}} & \text{selon } \hat{x} \\ v_1'\sin\theta = v_1^{*'}\sin\theta' & \text{selon } \hat{y} \end{cases}$$

En faisant le quotient des deux dernières équations on trouve :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + \frac{v_{\mathrm{CM}}}{v_1^{*'}}}$$

C'est presque l'équation qu'on souhaite prouvé, il nous reste un peu de travail,

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Il y a conservation de $\vec{p}$, au cours d'une collision élastique il y a conservation de l'énergie cinétique E_c,
Avant collision :

$$\vec{p_1^*} + \vec{p_2^*} = \vec{0}$$

Alors,

$$m_1\vec{v_1^*} + m_2\vec{v_2^*} = \vec{0}$$

Ce qui nous permet de trouvé :

$$\vec{v_1^*} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v_2^*} \tag{2}$$

Et de façon similaire pour après collision :

$$\vec{v_1^*}' = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v_2^*}' \tag{3}$$

Puisque l'énergie cinétique E_c est conservée,

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v_1^*}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v_2^*}^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v_1^*}'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v_2^*}'^2$$

Ce qu'on peut réécrire :

$$m_1(\vec{v_1^*}^2 - \vec{v_1^*}'^2) = m_2(\vec{v_2^*}'^2 - \vec{v_2^*}^2)$$

En utilisant les équation (2) et (3) on remplace les expressions dans la partie de droite, c'est à dire :

$$m_1\left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\vec{v_2^*}^2 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\vec{v_2^*}'^2\right] = m_2(\vec{v_2^*}'^2 - \vec{v_2^*}^2)$$

Qu'on peut réécrire :

$$(m_1 + m_2)\vec{v_2^*}^2 = (m_1 + m_2)\vec{v_2^*}'^2$$

Alors,

$$||\vec{v_2^*}|| = ||\vec{v_2^*}'|| = ||\vec{v}_{\text{CM}}||$$

Ce qui veux dire que :

$$\frac{\vec{v}_{\text{CM}}}{\vec{v_1^*}'} = \frac{\vec{v_2^*}'}{\vec{v_1^*}} = \frac{m_1}{m_2}$$

Alors,

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + \dfrac{m_1}{m_2}}}$$

2) Qu'en conclure dans le cas des masses égales ($m_1 = m_2$) ?

L'équation devient :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + 1}$$

On sait que :

$$\sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Et donc,

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{2\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) \cancel{- \sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)} + \cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) \cancel{+ \sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)}} \\
&= \frac{\cancel{2}\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\left(\frac{\theta'}{2}\right)} \\
&= \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\theta' = 2\theta}$$

3) Établir la relation qui donne la section efficace différentielle de diffusion élastique dans la direction du laboratoire en fonction de la grandeur correspondante relative à la direction θ' du centre de masse. Donner cette expression en fonction de θ' et des rapports des masses de la cible et du projectile.

On cherche un lien entre

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\theta_{\mathrm{SL}}} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\theta'_{\mathrm{CM}}}$$

où σ est la section efficace et Ω l'angle solide.

Dans le système du laboratoire, la particule incidente est diffusée entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$, et dans le système du centre de masse, la particule incidente est diffusée entre θ' et $\theta' + \mathrm{d}\theta'$
Et on sait que la section efficace différentielle de diffusion entre $\theta + \mathrm{d}\theta$ dans le système du laboratoire doit être égale à la section efficace différentielle de diffusion entre $\theta' + \mathrm{d}\theta'$ dans le système du centre de masse c'est à dire :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\theta_{\mathrm{SL}}} \mathrm{d}\Omega_\theta = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\theta'_{\mathrm{CM}}} \mathrm{d}\Omega_{\theta'}$$

Et on sait que :

$$d\Omega_\theta = \sin\theta d\theta d\varphi$$

Et que l'angle solide est invariant sous φ, c'est à dire que :

$$d\Omega_\theta = 2\pi \sin\theta d\theta$$

Ce qu'on peut encore écrire :

$$d\Omega_\theta = 2\pi\, d(\cos\theta) \qquad\qquad d\Omega_{\theta'} = 2\pi\, d(\cos\theta')$$

Alors,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta_{\mathrm{SL}}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta'_{\mathrm{CM}}} \frac{d(\cos\theta')}{d(\cos\theta)}$$

Il faut alors que l'on exprime $\cos\theta$ en fonction de $\cos\theta'$.

Dans la question 1. nous avions une relation,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + K}$$

On met au carré l'équation précédente,

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta'}{K^2 + \cos^2\theta' + 2K\cos\theta'}$$

Et on sait que :

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

Alors,

$$\cos^2\theta \times \sin^2\theta' = (1-\cos^2\theta)(K^2 + 2K\cos\theta' + \cos^2\theta')$$

On peut ainsi réécrire :

$$\cos^2\theta\left(\sin^2\theta' + \cos^2\theta' + K^2 + 2K\cos\theta'\right) = K^2 + 2K\cos\theta' + \cos^2\theta'$$

Ce qu'on peut réécrire :

$$\cos^2\theta\left(1 + K^2 + 2K\cos\theta'\right) = (K + \cos\theta')^2$$

Alors,

$$\cos\theta = \frac{K + \cos\theta'}{\sqrt{1 + 2K\cos\theta' + K^2}}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\cos\theta'} &= \frac{(1+K^2+2K\cos\theta')^{1/2} - \dfrac{1}{2}2K(1+2K\cos\theta'+K^2)^{-1/2}(K+\cos\theta')}{1+2K\cos\theta'+K^2} \\
&= \frac{1}{(1+2K\cos\theta'+K^2)^{1/2}}\left[1-\frac{K(\cos\theta'+K)}{1+2K\cos\theta'+K^2}\right] \\
&= \frac{1+K\cos\theta'}{(1+2K\cos\theta'+K^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\theta_{\mathrm{SL}}} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\theta'_{\mathrm{CM}}} \times \frac{(1+2K\cos\theta'+K^2)^{3/2}}{1+K\cos\theta'}$$

Exercice 2 : Désintégration en 2 corps

Soit un noyau atomique M_1 se désintégrant pour donner deux particules M_3 et M_4 ayant les vitesses v_3 et v_4 respectivement.

Désintégration au repos

Le noyau est supposé au repos avant la désintégration.

1) Faire un schéma.
2) En utilisant les lois de conservations, exprimer les énergies des particules filles en fonction des masses des particules mises en jeu. Que peut-on dire de leurs énergies cinétiques de point de vue des angles ?

   L'impulsion totale est conservée, alors

   $$\vec{p}_1 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$$

   Et on sait que $\vec{p}_1 = \vec{0}$, ainsi :

   $$\vec{p}_3 = -\vec{p}_4 \qquad\qquad ||\vec{p}_3|| = ||\vec{p}_4||$$

   On connaît l'énergie cinétique T :

   $$T = \frac{p^2}{2m}$$

   Appliqué à M_3 :

   $$T_3 = \frac{p_3^2}{2m_3} = \frac{p_4^2}{2m_4}$$

   Appliqué à M_4 :

   $$T_4 = \frac{p_4^2}{2m_4}$$

   Alors,

   $$T_3 = \frac{m_4}{m_3} T_4$$

   L'énergie est conservée,

   $$m_1c^2 + T_1 = m_3c^2 + T_3 + m_4c^2 + T_4$$

   Alors,

   $$\underbrace{(m_1 - m_3 - m_4)c^2}_{\text{chaleur de réaction } Q} = T_3 + T_4$$

Alors,

$$\boxed{T_3 = \frac{m_4}{m_3 + m_4} Q} \qquad \boxed{T_4 = \frac{m_3}{m_3 + m_4} Q}$$

Il n'y a pas de dépendance en θ dans les énergies cinétique, alors c'est une émission isotrope dans le système du laboratoire.

Désintégration en vol (cas non-relativiste)

Dans cette partie le noyau est animé d'une vitesse V_1, on se propose de traiter le problème dans le centre de masse.

3) En utilisant les transformations de Galilée,

$$\begin{cases} x' = x - v_{\text{CM}} t \\ y' = y \end{cases}$$

Exprimer la quantité de mouvement p d'une particule vue par un observateur dans le Laboratoire en fonction de :

- sa quantité de mouvement p' vue par un observateur situé au centre de masse,
- la vitesse v_{CM} du centre de masse,
- la masse m de la particule et
- l'angle θ' fait par p' dans le centre de masse.

$$\begin{cases} x' = x - v_{\text{CM}} t \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x = v_x - v_{\text{CM}} \\ v'_y = v_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p'_x = p_x - m v_{\text{CM}} \\ p'_y = p_y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ||\vec{p}||^2 &= p_x^2 + p_y^2 \\ &= (p'_x + m v_{\text{CM}})^2 + p'^2_y \\ &= p'^2_x + p'^2_y + 2m p'_x v_{\text{CM}} + m^2 v_{\text{CM}}^2 \\ &= ||\vec{p}||^2 + 2m p'_x v_{\text{CM}} + m^2 v_{\text{CM}}^2 \end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\boxed{||\vec{p}||^2 = ||\vec{p}||^2 + 2m p'_x v_{\text{CM}} + m^2 v_{\text{CM}}^2}$$

4) Retour au problème : Déterminer dans ce cas la vitesse C.M. par rapport à la vitesse V_1 du noyau. Que peut-on dire des valeurs des énergies cinétiques $T'_{3,4}$ dans le système de CM ? (Comparées aux valeurs $T_{3,4}$ trouvées dans la première partie).

$$v_{\text{CM}} = v_1$$

Dans le système du centre de masse, par définition le noyau est immobile, alors

$$\vec{v_1^*} = \vec{0}$$

C'est un résultat équivalent à la désintégration au repos dans le système du laboratoire,

$$T_3' = \frac{m_4}{m_3 + m_4} Q \qquad\qquad T_4' = \frac{m_3}{m_3 + m_4} Q$$

5) En se basant sur la partie 3, exprimer les énergies cinétiques des particules filles dans le système de Laboratoire. Comparer les énergies cinétiques trouvées dans cette partie avec celles trouvées dans la partie précédente toujours du point de vue des angles.

$$2m_3 T_3 = 2m_3 T_3' + 2m_3 \sqrt{2m_3 T_3'} \cos\theta_3' v_1 + m_3^2 v_{\text{CM}}^2$$

C'est à dire,

$$T_3 = T_3' + \sqrt{2mT_3'} \cos\theta_3' v_1 + \frac{m_3}{2} v_1^2$$

Et on a de même pour $T_4 = f(T_4', \theta_4')$, c'est à dire que les énergies cinétiques dépendent de l'angle d'émission de la particule dans le système centre de masse : l'émission est anisotrope.

Exercice 3 : Cinématique de la diffusion Compton

Partie 1 : Cadre général non-relativiste

Soit une particule légère M_1 de masse m_1 faible devant la masse m_2 de la particule M_2. La particule $M_1(P_1, 0)$ rentre en collision avec la particule $M_2(0, 0)$ au repos, pour donner naissance à deux particules $M_3(P_3, \theta_3)$ et $M_4(P_4, \theta_4)$.

1) Faire un Schéma. A partir des lois de conservation, exprimer P_4 en fonction des grandeurs dynamiques (P_1, θ_1) du projectile M_1 et (P_3, θ_3) du quasi projectile M_3.

   Il y a conservation de l'impulsion $\vec{p}$,

$$\vec{p_1} + 0 = \vec{p_3} + \vec{p_4}$$

   Alors,

$$\vec{p_4} = \vec{p_1} - \vec{p_3}$$

   C'est à dire,

$$\vec{p_4^2} = (\vec{p_1} - \vec{p_3})^2 = \vec{p_1^2} + \vec{p_3^2} - 2p_1p_2\cos\theta_3$$

2) Donner l'équation de $Q = ((m_1 + m_2) - (m_3 + m_4))c^2$ en fonction de T_1, T_3, m_1, m_3 et m_4.

   Il y a conservation de l'énergie, c'est à dire que :

$$m_1c^2 + T_1 + m_2c^2 + 0 = m_3c^2 + T_3 + m_4c^2$$

   Alors,

$$Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2 = T_3 + T_4 - T_1$$

$$\begin{aligned} T_4 = \frac{p_4^2}{2m_4} &= \frac{p_1^2}{2m_4} + \frac{p_3^2}{2m_4} - \frac{p_1p_3\cos\theta_3}{m_4} \\ &= \frac{m_1T_1}{m_4} + \frac{m_3T_3}{m_4} - \frac{p_1p_3\cos\theta_3}{m_4} \\ &= \frac{m_1}{m_4}T_1 + \frac{m_3}{m_4}T_3 - \frac{\sqrt{4m_1m_3T_1T_3}}{m_4}\cos\theta_3 \end{aligned}$$

   C'est à dire,

$$\boxed{Q = T_3\left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) + T_1\left(\frac{m_1}{m_4} - 1\right) - \frac{2\sqrt{m_1m_3T_1T_3}}{m_4}\cos\theta_3}$$

3) En déduire les solutions possibles pour T_3. Que se passe-t-il si $Q > 0$? Si $Q < 0$?

Pour simplifié les calculs, posons $x^2 = T_3$, alors

$$Q = x^2 \left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) + T_1 \left(\frac{m_1}{m_4} - 1\right) - \frac{2\sqrt{m_1 m_3 T_1}}{m_4} \cos\theta_3 x$$

On peut réecrire ça comme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Alors,

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{4\cos^2\theta_3}{m_4^2} m_1 m_3 T_1\right) - 4\left[T_1\left(\frac{m_1}{m_4} - 1\right) - Q\right]\left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right)$$

On connaît les résultats :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad\qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{4a^2} &= \frac{m_1 m_3}{(m_3 + m_4)^2} T_1 \cos^2\theta_3 - \frac{m_4^2}{(m_3 + m_4)^2} \frac{4}{4} \left(\frac{m_4 + m_3}{m_4}\right)\left(\frac{T_1(m_1 - m_4)}{m_4}\right) - m_4 Q \\
&= \left(\frac{\sqrt{m_1 m_3 T_1}\cos\theta_3}{m_3 + m_4}\right)^2 + \frac{m_4 Q + (m_4 - m_1) T_1}{m_3 + m_4} \\
&= \alpha^2 + \beta
\end{aligned}$$

Et

$$-\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{m_1 m_3 T_1}}{m_3 + m_4} \cos\theta_3 = \alpha$$

Alors,

$$x = \sqrt{T_3} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta}$$

Alors, T_3 est une fonction de m_1, m_3, m_4, T_1 et θ_3

- Si $Q > 0$ c'est une réaction énergétique, c'est à dire qu'une partie de l'énergie de la voie d'entrée est transformée en énergie cinétique T_1.
- Si $Q < 0$ c'est une réaction endo-énergétique, c'est à dire qu'il faut fournir de l'énergie cinétique pour que le processus ai lieu.

  C'est à dire qu'il y a réaction pour $E_c > T_{\text{seuil}}$, où T_{seuil} correspond à la situation où la réaction a lieu mais les énergies cinétiques dans la voie de sortie sont nulles, c'est à dire que les particules sont au repos dans le système centre de masse.

$$T_1^{\text{seuil}} \quad T_3^* = T_4^* = 0$$

La quantité invariante ici peut être la masse, c'est à dire identique dans tout les référentiels,

$$(Mc^2)^2 = (\sum_i E_i) - ||\sum_i \vec{p}_i c||^2$$

où M est la masse invariante.

$$\begin{array}{cc} \text{SL} & (1) + (2) \to (3) + (4) \\ \text{CM} & (1)^* + (2)^* \to (3)^* + (4)^* \end{array}$$

$$M_{\text{SL},i}c^2 = M_{\text{SL},f}c^2 = M_{\text{CM},i}c^2 = M_{\text{CM},f}c^2$$

$$M^2_{\text{SL},i}c^4 = M^2_{\text{CM},f}c^4$$

Ce qu'on peut réécrire,

$$(E_1 + E_2)^2 - ||\vec{p}_1 c + \vec{p}_2 c||^2 = (E_3^* + E_4^*)^2 - ||\vec{p}_3^* + \vec{p}_4^*||^2$$

Par définition du seuil, $\vec{p}_3^* = \vec{p}_4^* = \vec{0}$, et on avait posé $\vec{p}_2 = \vec{0}$

$$\begin{aligned} & (E_1 + m_2c^2)^2 - ||\vec{p}_1||^2c^2 = (m_3c^2 + m_4c^2)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & E_1^2 + 2E_1m_2c^2 + m_2c^2c^4 - ||\vec{p}_1||^2c^2 = (m_1c^2 + m_2c^2 - Q)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2E_1m_2c^2 = (m_1c^2 + m_2c^2)^2 + Q^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)Q \\ \Leftrightarrow \quad & \cancel{(m_1c^2 + m_2c^2)^2} - 2m_1m_2c^4 + 2E_1m_2c^2 = \cancel{(m_1c^2 + m_2c^2)^2} + Q^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)Q \\ \Leftrightarrow \quad & 2m_2E_1c^2 - 2m_1m_2c^4 = Q^2 - 2(m_1c^2 + m_2c^2)Q \end{aligned}$$

Alors,

$$\boxed{E_1 = m_1c^2 + \frac{Q^2}{2m_2c^2} - Q\left(\frac{m_1c^2 + m_2c^2}{m_2c^2}\right)}$$

Cette expression est valide uniquement au seuil.

$$T_1^{\text{seuil}} = E_1^{\text{min}} - m_1c^2$$

Alors,

$$\boxed{T_1^{\text{seuil}} = \frac{Q^2}{2m_2c^2} - Q\left(\frac{m_1c^2 + m_2c^2}{m_2c^2}\right)}$$

Cela correspond à l'énergie minimal à apporté au système pour que la réaction ai lieu.

Partie 2 : Application à l'effet Compton

L'expérience de Compton devint l'ultime observation qui convainquit tous les physiciens que la lumière peut se comporter comme un faisceau de particules dont l'énergie est proportionnelle à la fréquence (ou inversement à la longueur d'onde). Cet effet est important en physique car il a démontré que la lumière ne peut pas être uniquement décrite comme une onde, ni comme une particule. (Wikipédia)

On se propose de retrouver l'expression décrivant l'effet Compton en se basant sur la cinématique d'un choc purement corpusculaire.

Cadre Général relativiste

4) Cas relativiste
Indication : Dans le cadre relativiste, l'impulsion d'une particule peut s'exprimer sous la forme $p^2 = 2Tm + T^2/c^2$ (avec T énergie cinétique).
Réécrire la relation obtenue en 1. en tenant compte de la formule donnée et en éliminant T_4.

Dans un cadre non relativiste nous avions que :

$$T = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p^2 = 2mT$$

Dans un cadre relativiste on sait que :

$$\left.\begin{aligned} E^2 &= (T + mc^2)^2 \\ E^2 &= p^2c^2 + m^2c^4 \end{aligned}\right\} \rightarrow p^2c^2 + \cancel{m^2c^4} = T^2 + \cancel{m^2c^4} + 2mTc^2$$

Alors,

$$\boxed{p^2 = 2mT + \left(\frac{T}{c}\right)^2}$$

Ce qui permet ainsi de retrouvé la formule qu'on nous donne dans l'énoncé.

On sait que :

$$\vec{p}_4^{\,2} = \vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_3^{\,2} - 2p_1p_3\cos\theta_3$$

Alors,

$$2T_4m_4 + \left(\frac{T_4}{c}\right)^2 = 2T_1m_1 + \left(\frac{T_1}{c}\right)^2 + 2T_3m_3 + \left(\frac{T_3}{c}\right)^2 - 2\sqrt{2T_1m_1 + \left(\frac{T_1}{c}\right)^2}\sqrt{2T_3m_3 + \left(\frac{T_3}{c}\right)^2}\cos\theta_3$$

Et on sait que :

$$Q = T_3 + T_4 - T_1 - \cancel{T_2} \Longleftrightarrow T_4 = Q + T_1 - T_3$$

On peut ainsi réécrire :

$$\boxed{2(Q + T_1 - T_3)m_4 + \frac{1}{c^2}(Q + T_1 - T_3)^2 = 2T_1m_1 + \left(\frac{T_1}{c}\right)^2 + 2T_3m_3 + \left(\frac{T_3}{c}\right)^2 - \Gamma}$$

où

$$\gamma = 2\sqrt{2T_1m_1 + \left(\frac{T_1}{c}\right)^2}\sqrt{2T_3m_3 + \left(\frac{T_3}{c}\right)^2}\cos\theta_3$$

Cadre de l'effet Compton

5) Lorsqu'il s'agit d'un effet Compton, les particules de la voie d'entrée (γ, e) ont la même nature que les particules de la voie de sortie (γ', e) ; que peut-on dire sur la chaleur massique Q ?

$$Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2$$

Et on sait que la particule 1 et 3 sont des photons, c'est à dire qu'il n'ont pas de masse, et que la particule 2 et 4 sont des électrons de même masse m_3, alors :

$$Q = (m_e - m_e)c^2 = 0$$

6) Sachant que la masse d'un photon est nulle, exprimer T_3 en fonction de tout le reste.

$$Q = T_{\gamma'} + T_e - T_\gamma = 0 \Longleftrightarrow T_e = T_\gamma - T_{\gamma'}$$

Alors,

$$\begin{aligned} & 2m_e(T_\gamma - T_{\gamma'}) + \frac{1}{c^2}(T_\gamma - T_{\gamma'})^2 = \frac{T_\gamma^2}{c^2} + \frac{T_{\gamma'}^2}{c^2} - \frac{2}{c^2}\sqrt{T_\gamma^2 T_{\gamma'}^2}\cos\theta_{\gamma'} \\ \Leftrightarrow \quad & m_e(T_\gamma - T_{\gamma'}) - \frac{T_\gamma T_{\gamma'}}{c^2} = -\frac{T_\gamma T_{\gamma'}}{c^2}\cos\theta_{\gamma'} \\ \Leftrightarrow \quad & T_{\gamma'}\left(m_e + \frac{T_\gamma}{c^2}(1 - \cos\theta_{\gamma'})\right) = m_e T_\gamma \end{aligned}$$

Alors,

$$\boxed{T_{\gamma'} = \frac{T_\gamma}{1 + \frac{T_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta_{\gamma'})}}$$

7) Quel est la différence de longueur d'onde entre le photon 3 et le photon 1 ?

D'après l'équation précédente,

$$\frac{\cancel{hc}}{\lambda_{\gamma'}} = \frac{\cancel{hc}}{\lambda_\gamma}\frac{1}{1+\dfrac{hc}{\lambda_\gamma m_e c^2}(1-\cos\theta_{\gamma'})}$$

C'est à dire,

$$\lambda_{\gamma'} = \lambda\left[1+\frac{hc}{\lambda_\gamma m_e c^2}(1-\cos\theta_{\gamma'})\right]$$

Alors,

$$\boxed{\lambda_{\gamma'} - \lambda_\gamma = \frac{hc}{m_e c^2}(1-\cos\theta_{\gamma'})}$$

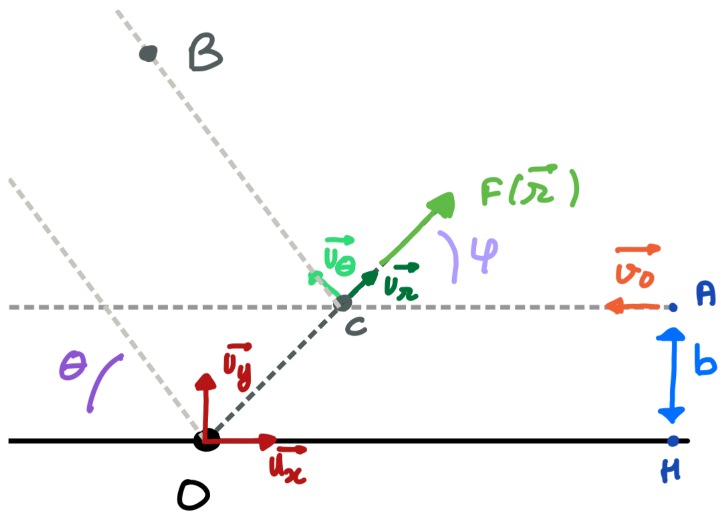
Exercice 4 : Diffusion de Rutherford

Cette diffusion concerne l'interaction de particules chargées. Elle se traduit par la présence de la force de Coulomb, d'où son autre nom (diffusion coulombienne). Ce phénomène a été expliqué en 1911 par Ernest Rutherford, et a conduit au développement du modèle de Bohr de l'atome. La découverte a été fait par Hans Geiger et Ernest Marsden en 1911, lors de l'expérience de Rutherford, dans laquelle un faisceau de particules alpha est bombardé sur une couche d'or. Cette expérience eut une importance particulière car c'est de cette dernière que Rutherford en déduisit le modèle planétaire de l'atome.

1) Démontrer que la distance minimale d'approche, notée a_0, est donnée par :

$$a_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 T}$$

avec T l'énergie cinétique de la particule.



On connaît la force de Coulomb :

$$\vec{F}_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2}\vec{u}_r$$

Alors l'énergie potentielle E_p associée :

$$E_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

Il y a conservation de l'énergie, c'est à dire que au point A,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \qquad E_p = 0 \qquad E_{\text{mécanique}} = E_c$$

Et au point C,

$$\vec{v} = \vec{0} \qquad E_c = 0 \qquad E_{\text{mécanique}} = E_p$$

Alors,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{a_0} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

C'est à dire :

$$\boxed{a_0 = \frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\epsilon_0 T}}$$

2) Montrer que la relation entre l'angle de diffusion et le paramètre d'impact b est :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a_0}{2b}$$

Force centrale :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \longrightarrow \vec{L} = \text{constante}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\varphi}\vec{u}_z$$

Au point A,

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge m\vec{v}_0 \\
&= (\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}}) \wedge m\vec{v}_0 \\
&= b\vec{u}_y \wedge (-mv_0\vec{u}_x) \\
&= mv_0b\vec{u}_z
\end{aligned}$$

$$L = \underbrace{mv_0b}_{\text{(A)}} = \underbrace{mr^2\dot{\varphi}}_{\text{(B)}}$$

Alors,

$$r^2\dot{\varphi} = v_0b$$

On applique le principe fondamentale de la dynamique,

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = F\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix}v_x \\ v_y\end{pmatrix}$$

Alors,

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = F\sin\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{r^2}\sin\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{v_0b}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

On intègre entre A et B

- En A

$$\varphi = 0 \qquad\qquad v_y = 0 \qquad\qquad v_x = ||v_0||$$

- En B

$$\varphi = \pi - \theta \qquad\qquad \vec{v} = \vec{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
& m\int_0^{v_0\sin\theta} \mathrm{d}v_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{v_0 b}\int_0^{\pi-\theta}\mathrm{d}(\cos\varphi) \\
\Leftrightarrow \quad & mv_0\sin\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{v_0 b}(-\cos\theta - 1) \\
\Leftrightarrow \quad & mv_0\sin\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{v_0 b}(\cos\theta + 1) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{mv_0^2 b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1Z_2e^2}{mv_0^2 b} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1} \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cancel{- \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cancel{+ \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\boxed{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a_0}{2b}}$$

3) A partir des relations précédentes, donner l'expression de la section efficace différentielle de Rutherford.
On donne :

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi b\mathrm{d}b \qquad\qquad \mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}b} \times \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\Omega}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}b} = 2\pi b \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{2\pi \sin\theta}$$

De la question précédente on trouve,

$$b = \frac{a_0}{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

On trouve alors :

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{a_0}{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= 2\pi b \times \left(-\frac{a_0}{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \times \frac{1}{2\pi\sin\theta} \\ &= -\frac{a_0}{16\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}\end{aligned}$$

Alors :

$$\boxed{\left|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right| = \frac{a_0}{16\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$